三种重要分布的极限分布*

杨善兵

(盐城工学院 基础科学部,江苏 盐城　224003)

摘　要:超几何分布、二项分布、普阿松分布、正态分布是概率论中几种重要的分布函数,这 4 种概率分布之间存在着一定的联系。给出了它们之间的关系,并进行证明,同时指出了它们在实际问题中的应用。

关键词:超几何分布;二项分布;普阿松分布;正态分布

中图分类号:O186　　**文献标识码**:A　　**文章编号**:1671-5322(2003)01-0074-02

在概率论的学习中,经常会遇到一些复杂的概率计算,如果直接计算会很繁琐,但从它们的极限分布去计算会很简便,为此给出几个常见概率分布的极限分布,并给以部分证明。

定理 1[1]　设 $T=N+M$,$h(k;n,M,N)=\dfrac{C_M^k C_N^{n-k}}{C_{M+N}^n}$,$k=0,1,\cdots\cdots\min(M、n)$,若 $\lim\limits_{T\to\infty}\dfrac{M}{T}=p$,则对任意正整数 n,有 $\lim\limits_{T\to\infty}h(k;n,M,N)=b(k,n,p)$,$k=0,1,2,\cdots,n$。

其中 $h(k;n,M,N)$ 表示随机变量 k 服从超几何分布,$b(k,n,p)$ 表示随机变量 k 服从二项分布。

证明:因为

$$\frac{C_M^k C_N^{n-k}}{C_{M+N}^n}=C_n^k\left(\frac{M}{T}\right)^k\cdot\left(1-\frac{N}{T}\right)^{n-k}\cdot\frac{\left(1-\frac{1}{M}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{M}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{M}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{N}\right)\cdots\left(1-\frac{n-k-1}{N}\right)}{\left(1-\frac{1}{T}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{T}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{T}\right)}。$$

由条件知,当 $T\to\infty$ 时,$M\to\infty$,所以令 $T\to\infty$ 时,上式趋于 $b(k,n,p)$。

由此可见,当一批产品的总数 T 很大,而抽取样品的个数 n 远较 T 为小(一般说来,$\frac{n}{T}\leqslant 10\%$)时,则不放抽样(样品中次品数服从超几何分布)与放回抽样(样品中的次品数服从二项分布)实际上无多大区别。

在 n 重贝努力实验中,其中 n 较大,p 较小,但是乘积 $np=\lambda$ 大小适中有下面定理。

定理 2[2]　如果 $\lim\limits_{n\to\infty}nP_n=\lambda$,则 $\lim\limits_{n\to\infty}b(k,n,p)=e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$,$k=0,1,2,\cdots$。

证明:记 $\lambda_n=np_n$,当 $k=0$ 时,$b(k,n,p)=(1-p_n)^n=\left(1-\dfrac{\lambda_n}{n}\right)^n$ 故成立。

当 $k\geqslant 1$ 时,$b(k,n,p_n)=C_k^n p_n^k(1-p_n)^{n-k}=\dfrac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}p_n^k\cdot(1-p_n)^{n-k}=$

$\left(\dfrac{\lambda_n^k}{k!}\right)\cdot\left(1-\dfrac{1}{n}\right)\cdot\left(1-\dfrac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\dfrac{k-1}{n}\right)\cdot\left(1-\dfrac{\lambda_n}{n}\right)^{n\cdot\frac{n-k}{n}}$

因为对于固定的 k,有 $\lim\limits_{n\to\infty}\lambda_n^k=\lambda^k$,$\lim\limits_{\to\infty}\left(1-\dfrac{\lambda_n}{n}\right)^{n\cdot\frac{n-k}{n}}=e^{-\lambda}$。

故 $\lim\limits_{n\to\infty}b(k,n,p_n)=e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$,$=0,1,2,\cdots$。

* 收稿日期:2002-10-11
作者简介:杨善兵(1974-),男,安徽寿县人,盐城工学院助教。

如果 $np_n=\lambda>0$，显然有 $\lim\limits_{T\to\infty} b(k,n,p_n)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$，$k=0,1,2,\cdots$。

定理 3[3]　设在独立试验序列中，事件 A 在各次试验中发生的概率为 $p(0<p<1)$，随机变量 η_n 表示事件 A 在 n 次试验中发生的次数，则有 $\lim\limits_{n\to\infty} p\left(\frac{\eta_n-np}{\sqrt{npq}}<X\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t$，其中 x 为任意实数，$p+q=1$。

此定理的证明要利用到列维定理，此处略证。

由此定理可推知，设在独立试验序列中，事件 A 在各次试验中发生的概率为 $p(0<p<1)$，则当 n 充分大时，事件 A 在 n 次试验中发生的次数 η_n 在 m_1 与 m_2 之间的概率。

$p(m_1\leqslant\eta_n\leqslant m_2)\approx\phi\left(\frac{m_2-np}{\sqrt{npq}}\right)-\phi\left(\frac{m_1-np}{\sqrt{npq}}\right)$，其中 $p+q=1$。

当 n 充分大时，服从二项分布 $B(n,p)$ 的随机变量 η_n 近似地服从正态分布 $N(np,npq)$。这种正态近似相当重要，因为它提供了计算二项概率的和的一种实用而简便的方法。

定理 4[4]　若 ζ_λ 是一随机变量，它服从参数为 λ 的普阿松分布，当 $\lambda\to\infty$ 时，有

$$p\left\{\eta_\lambda=\frac{\zeta_\lambda-\lambda}{\sqrt{\lambda}}<X\right\}\to\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t。$$

证明：设 ζ_λ 的特征函数为 $\Psi_\lambda(t)=e^{\lambda(e^{it}-1)}$ 故 $\eta_\lambda=\frac{\zeta_\lambda-\lambda}{\sqrt{\lambda}}$ 的特征函数为

$$g_\lambda(t)=\Psi_\lambda\left(\frac{t}{\sqrt{\lambda}}\right)^{-i\sqrt{\lambda}t}=e^{\lambda\left(e^{i\frac{t}{\sqrt{\lambda}}}-1\right)-i\sqrt{\lambda}t}$$

t 任意取值，有 $e^{i\frac{t}{\sqrt{\lambda}}}=1+\frac{it}{\sqrt{\lambda}}-\frac{t^2}{2!\lambda}+0\left(\frac{1}{\lambda}\right)$，$\lambda\to\infty$

所以 $\lambda\left(e^{i\frac{t}{\sqrt{\lambda}}}-1\right)-i\sqrt{\lambda}t=-\frac{t^2}{2}+\lambda 0\left(\frac{1}{\lambda}\right)\to-\frac{t^2}{2}$，$\lambda\to\infty$

取 λ_n 为任意的点列，当 $\lambda_n\to\infty$ 时，有 $\lim\limits_{n\to\infty} g_{\lambda n}(t)=e^{-\frac{t^2}{2}}$，由于 $e^{-\frac{t^2}{2}}$ 是 $N(0,1)$ 分布的特征函数，可知 $\lim\limits_{n\to\infty} p\left\{\frac{\zeta_{\lambda n}-\lambda_n}{\sqrt{\lambda_n}}<x\right\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{-t^2}{2}}\mathrm{d}t$ 成立，又因为 λ_n 是可以任意取的，故定理得证。

在概率论的学习中，使学生对超几何分布，二项分布，普阿松分布和正态分布，这四种重要分布之间的关系，有了更清晰的认识：在超几何分布 $H(k;n,N,M)$ 中，当 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{M}{T}=p$ 时，它服从二项分布，即超几何分布的极限分布是二项分布；在二项分布 $B(n,p_n)$ 中，当 $np_n\to\lambda$ 时，它服从普阿松分布，当 $n\to\infty$ 时，它服从正态分布，即二项分布的极限分布是正态分布；而普阿松分布中，当 $\lambda\to\infty$ 时，随机变量 $\eta_\lambda=\frac{\zeta_\lambda-\lambda}{\sqrt{\lambda}}$ 服从正态分布，知道这些以后，当符合条件时可以用它们的极限分布作近似计算。

参考文献：

[1] 复旦大学. 概率论(第一册 概率论基础)[M]. 北京：人民教育出版社，1979.
[2] 中山大学数力学. 概率率与数理统计[M]. 北京：高等教育出版社，1980.
[3] 王梓坤. 概率论基础及其应用[M]. 北京：北京师范大学出版社，1996.
[4] 魏宗舒. 概率论及数理统计[M]. 北京：高等教育出版社，1983.

(下转第 78 页)

参考文献:

[1] 康华光.电子技术基础(数字部分)[M].北京:高等教育出版社,2000.

[2] Thomas L. Floyd, Digital Fundamentals[M].北京:科学出版社,2002.

[3] 刘宝琴.数字电路与系统[M].北京:清华大学出版社,1993.

[4] 李大友.数字电路逻辑设计[M].北京:清华大学出版社,1997.

The Study on "The Method of Clearing Zero by Feedback" with MAX + plus Ⅱ Software

ZHOU You - bing

(Huaian College of Information Technology, Jiangsu Huaian　223001, China)

Abstract: This paper introduces the result of studying on "The Method of Clearing Zero by Feedback". The students can observe the clear course by waveform using MAX + plus Ⅱ software. "The Method of Load Date by Feedback" is also simulated with MAX + plus Ⅱ software.

Keywords: MAX + plus Ⅱ software; The Method of Clearing Zero by Feedback; Graphic; simulate; waveform; The Method of Load Date by Feedback

(上接第 73 页)

参考文献:

[1] 高伟.地下管线管理技术及应用[M].北京:中国建筑出版社,2000.

The Detection Method and Effect Evaluation to the Water Leakage of Water Supply Pipe Network

WANG Xue-jin

(Yancheng Water Supply Cmpany, Jiangsu Yancheng　224003, China)

Abstract: With the development of the city and the water supply scale is enlarging, the water leakage of the pipe network is increasing. To decrease the water leakage is the first problem to solve for the water supply enterprises. Because the hidden leakage is the minor reason for the pipe network, the water supply enterprises must take measures to find the hidden leakage of the pipe network. The detection method of the water leakage is introduced and the effect evaluation is also studied.

Keywords: pipe network; water leakage; detection; method; evaluation

(上接第 75 页)

The Limit Distrbution of Three Important Distributions

YANG Shan-bing

(Department of Basic Science of Yancheng Institute of Technology, Jiangsu Yancheng　224003, China)

Abstract: Super geomentry distribution, Binominal distribution, Poission distribution and Normal distribution are important distribution functions in probability theory. The paper has discussed some problems about the relations armong them. A part of proofs are given to show what the limit distribution of three distribution are. What's more, the paper has pointed out the usage of them.

Keywords: super geometry distribution; binomial distribution; poisson distribution; normal distribution