

代数基本定理的度理论证法*

王 超

(苏州大学 数学科学学院 江苏 苏州 225006)

摘 要:从拓扑度理论的角度给出了代数基本定理的证法。

关键词:代数基本定理;Brouwer 度;零点

中图分类号:O15

文献标识码:A

文章编号:1671-532X(2003)04-0018-02

代数基本定理断言:任何一个 n 次多项式 $F(z) = \alpha_0 z^n + \alpha_1 z^{n-1} + \dots + \alpha_{n-1} z + \alpha_n$ ($\alpha_n \neq 0$) 在复平面上至少有一个根,或者:任何一个 n 次多项式在复平面上有且只有 n 个根(n 根就算作 n 个根)。代数基本定理的证明方法比较多,一般的方法是采用复变函数的方法^[1~2],张筑生^[3]和 J. M. 米尔诺^[4]给出了拓扑的证明方法,本文用 Brouwer 度的理论给出它的一个拓扑证法。

1 预备知识^[5]

定义 1 设 Ω 为 R^n 中的有界开集, $f \in C^2(\bar{\Omega}, R^n)$, $p \in R^n$, $p \notin f(\partial\Omega)$ 。定义映射 f 在 Ω 中关于 p 点的 Brouwer 度 $\deg(f, \Omega, p)$ 如下:

当 p 是 f 的正则值时, 让

$$\deg(f, \Omega, p) = \sum_{x \in f^{-1}(p)} \text{Sgn} J_f(x)$$

当 p 是 f 的临界值时, 取 p_1 是 f 的正则值, 满足 $\|p_1 - p\| < \rho = \text{dis}(p, f(\partial\Omega))$, 并让 $\deg(f, \Omega, p) = \deg(f, \Omega, p_1)$ 。

定义 2 设 Ω 为 R^n 中的有界开集, $f \in C(\bar{\Omega}, R^n)$, $p \in R^n \setminus f(\partial\Omega)$, 让 $f_1 \in C^2(\bar{\Omega}, R^n)$, 使得

$$\sup_{x \in \bar{\Omega}} \|f(x) - f_1(x)\| < \rho = \text{dis}(p, f(\partial\Omega))$$

定义 f 在 Ω 上关于 p 点的 Brouwer 度为

$$\deg(f, \Omega, p) = \deg(f_1, \Omega, p)$$

定理 设 Ω 是 R^n 中的有界开集, $f \in C(\bar{\Omega}, R^n)$, Brouwer 度 $\deg(f, \Omega, p)$ 具有如下重要性质:

(1) 切除性 设 K 是 $\bar{\Omega}$ 中的闭集, 且 $p \notin f(K)$, 则

$$\deg(f, \Omega, p) = \deg(f, \Omega \setminus K, p)$$

(2) Kronecker 存在性定理 当 $p \notin f(\bar{\Omega})$ 时, $\deg(f, \Omega, p) = 0$ 。因此, 若 $\deg(f, \Omega, p) \neq 0$, 则方程 $f(x) = p$, 当 Ω 内存在解的。

(3) Poincare-Bohl 定理 设 $f, g \in C(\bar{\Omega}, R^n)$, 且当 $x \in \partial\Omega$ 时, p 不在 $f(x)$ 与 $g(x)$ 所在的线段上, 则 $\deg(f, \Omega, p) = \deg(g, \Omega, p)$ 。

2 引理

引理 1 设 Ω 为 R^n 中的有界开集, $f, g \in C(\bar{\Omega}, R^n)$, 并且当 $x \in \partial\Omega$ 时, $\|g(x)\| < \|f(x)\|$, 证明:

$$\deg(f + t, \Omega, p) = \deg(f, \Omega, p)$$

证明: 显然 $0 \in R^n \setminus f(\partial\Omega)$ 且 $f + g \in C(\bar{\Omega}, R^n)$, 当 $x \in \partial\Omega$ 时 $0 \leq t \leq 1$ 时

$$t(f(x) + g(x)) + (1-t)f(x) = f(x) + tg(x) \neq 0$$

否则, 存在 $x_0 \in \partial\Omega$ 时有 $(f + tg)x_0 = 0$

则 $\|f(x_0)\| = t\|g(x_0)\|$, 与假设矛盾。

从而当 $x \in \partial\Omega$ 时 0 不在 $f(x)$ 与 $g(x)$ 所连接的线段上, 则 Poincare-Bohl 定理知 $\deg(f + g, \Omega, p) = \deg(f, \Omega, p)$ 。

引理 2 设 $f: R^2 \rightarrow R^2$ 定义为 $f(z) = \alpha z^n$ ($\alpha \neq 0$), 其中 Z 是复数。证明: $\deg(f, B_1(0), n) = n$ 。

证明: 显然 $0 \in R^2 \setminus f(\partial B_1(0))$

则 Sard 定理和 f 的连续性, 在 0 的某一个充分小邻域里取 f 的正则值 $p \neq 0$, 使 $p \notin f(\partial B_1$

* 收稿日期: 2003-10-20

作者简介: 王 超 (1974-) 男, 江苏盐城市人, 苏州大学在读硕士研究生, 研究方向为长微分方程。

(0)) 则有

$$\deg(f, \Omega, 0) = \deg(f, \Omega, p)$$

易知 $\alpha z^n = p$ 在 $B_1(0)$ 内有 n 个解 $z_i (i: 1, \Lambda, n)$

设 $\alpha z^n = p(x, y) + iQ(x, y)$, 因为 αz^n 为解析函数, 所以

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}, \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x}$$

从而 f 的 Jacobi 行列式

$$J_f(x) = \begin{vmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} & \frac{\partial P}{\partial y} \\ -\frac{\partial P}{\partial y} & \frac{\partial Q}{\partial x} \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)^2$$

由于 $p \neq 0$, 则 $J_f(z_i) > 0$.

从而

$$\deg(f, \Omega, 0) = \deg(f, \Omega, p) = \sum_{z_i \in f^{-1}(p)} J_f(z_i) = n.$$

3 证明方法

在引理 1 中, 设 $R^n = R^2$, $f(z) = a_0 z^n$, $g(z) = a_1 z^{n-1} + \Lambda + a_n$.

$$\text{由于 } \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{f(z)}{g(z)} = \infty,$$

所以, 当 $|z|$ 充分大后, $\|g(z)\| < \|f(z)\|$

取 $\Omega = \{z \in R^2 : |z| < r, r \text{ 充分大}\}$, 则 $0 \notin f(\partial\Omega)$ 且 $z \in \partial\Omega$ 时, $\|g(z)\| < \|f(z)\|$.

则引理 1 得

$$\deg(f + g, \Omega, 0) = \deg(f, \Omega, 0)$$

由于当 $z \in k = \{z \in R^2 : 1 \leq |z| \leq r\}$ 时, $f(z) \neq 0$

所以, 由切除性及引理 2 知, $\deg(f, \Omega, 0) = \deg(f, B(0), 0) = n$, 即 $\deg(f + g, \Omega, 0) = n$.

由 Kronecker 存在性定理, $F(z) = f(z) + g(z)$ 在 $\Omega = B_r(0)$ 内至少有一解, 从而 $F(z)$ 在 C 上至少有一根。

参考文献:

- [1] 钟玉泉. 复变函数论[M]. 北京: 高等教育出版社, 1999.
- [2] 韦煜. 代数基本定理的复分析证法[J]. 黔南民族师范学院学报, 2001(6): 9-11.
- [3] 张筑生. 微分拓扑新讲[M]. 北京: 北京大学出版社, 2002.
- [4] J. W. 米尔诺[美]. 从微分观点看拓扑[M]. 熊金城译. 上海: 上海科学技术出版社, 1983.
- [4] 钟承奎, 范先令, 陈文. 非线性泛函分析引论[M]. 兰州: 兰州大学出版社, 1998.

The Theorem of Topological Degree and the Proof of Fundamental Theorem of Algebra

WANG Chao

(School of Science and Math of Suzhou University, Jiangsu Suzhou 215006, China)

Abstract : Giving a proof for the Fundamental Theorem of Algebra from the theorem of Topological degree.

Keywords : The Fundamental theorem of Algebra ; Brouwer degree ; Zero point