

# 表决系统 Bayes 可靠性评估及其仿真\*

柏仲干<sup>1,2</sup>, 谢红卫<sup>1</sup>, 李鹏波<sup>1</sup>, 张湘平<sup>1</sup>

(1. 国防科技大学机电工程与自动化学院, 湖南 长沙 410073 2. 63880 部队)

**摘 要** 提出了表决系统 Bayes 可靠性评估的数字仿真方法。依据表决系统组成的结构特点和系统 Bayes 可靠性评估的基本原理, 在进行单元可靠性评估的基础上, 分别运用 Bayes MC、Bayes bootstrap 和 double Bayes MC 方法进行系统可靠性评估。给出了表决系统 Bayes 可靠性评估的一般步骤。仿真实例表明了方法的可行性。

**关键词** 可靠性评估; 表决系统; Bayes; Monte - Carlo

**中图分类号** TP391

**文献标识码** A

**文章编号** 1671 - 5322(2003)04 - 0020 - 03

在可靠性工程中, 通常构成系统的单元或者分系统都有较多的试验数据, 并且在产品的研制和更新中常常积累了大量的经验知识, 而至于许多系统本身, 往往由于价格昂贵、可靠性高(如导弹、卫星和载人飞船等), 系统级试验数据很少甚至没有。相比其它将系统可靠性指标进行等效折合分配并评估的方法, 运用 Bayes 方法进行系统可靠性评估可以充分利用组成单元的试验信息和各种经验知识<sup>[1~6]</sup>。

表决系统通常可分为  $k/n(G)$  和  $n/n(F)$  两种类型。其中  $k/n(G)$  表示系统  $n$  个单元中至少有  $k$  个单元正常工作, 则系统正常工作。 $k/n(F)$  表示系统  $n$  个单元中有  $k$  个单元失效, 则系统失效, 其等价于  $(n - k + 1)/n(G)$  系统。

传统的 Bayes 可靠性评估采用“金字塔”式由底层向上、层层折合的数据融合方式<sup>[1]</sup>, 采用矩等效的融合原理对具有复杂结构的表决冗余系统进行可靠性评估时, 其系统可靠度各阶矩无法用单元可靠度的矩显式表示, 需要设计新的系统可靠性评估方法。本文详细论述了该类系统可靠性评估的特点, 进而设计相应的算法, 并在 Matlab6.5 平台下进行了仿真。

## 1 $k/n(G)$ 表决系统的抽样与可靠度评估的 Monte - Carlo 方法

当系统组成单元存在各种验前信息时, 文

献<sup>[1]</sup>推导了验后分布参数的多种融合公式。实现 Monte - Carlo 仿真的关键是随机变量的产生, 根据共轭分布的原理, 系统可靠度分布模型有 Beta 分布、Gamma 分布、对数正态分布等。产生以上非均匀随机数的常用方法有直接抽样法、变换抽样法、值序抽样法、舍选抽样法、复合抽样法等<sup>[2]</sup>。

当组成单元分布类型相同时, 设单元在任务时刻的可靠度为  $R \equiv R(t)$ , 则根据公式(1)求出系统可靠度样本值;

$$R_s \equiv R_s(t) = \sum_{i=k}^n C_n^i R^i (1 - R)^{n-i} \quad (1)$$

当组成单元分布类型不同时, 一般按照全概率公式进行分解或者按照 Taylor 展开的方法求系统可靠度样本值。本文采用全概率公式分解方法, 具体步骤如下: 对于单元可靠度验后抽样  $R_i^j$  ( $i = 1 \sim n, j = 1 \sim l$ ), 其中  $l$  为抽样数, 降序排列为  $R_{(i)}^j$  ( $i = 1 \sim n, j = 1 \sim l$ ), 则系统可靠度为:

$$R^j(n, k) = R_{(n)}^j R^j(n - 1, k - 1) + (1 - R_{(n)}^j) R^j(n - 1, k) \quad (2)$$

递推计算直到出现  $R^j(n - k, 0)$  和  $R^j(k, k)$ , 其中

$$\begin{cases} R^j(n - k, 0) = 1 \\ R^j(k, k) = \prod_{i=1}^k R_{(i)}^j \end{cases} \quad (3)$$

\* 收稿日期: 2003 - 08 - 09

作者简介: 柏仲干(1975-), 男, 江苏大丰市人, 工程师, 在读硕士生, 研究方向为小子样统计理论、可靠性方法。

依据 (2) 和 (3) 式进行迭代计算, 求出系统可靠度样本值  $R_s^j (j = 1 \sim l)$ 。

Monte - Carlo 方法是通过建立系统的概率模型以及对随机变量的仿真抽样而实现的, 对于随机模型而言, MC 仿真方法的精度主要由随机数的质量、抽样样本数和抽样方法决定。因此, 合理的抽样方法和计算方法有助于提高 MC 仿真的精度。

系统可靠度评估的 Monte - Carlo 方法又分为 Bayes MC、Bayes bootstrap 和 double Bayes MC 方法, 其区别在于抽样方式和时机选择的不同。

Bayes MC 方法根据单元验后分布直接进行抽样, 然后递推计算系统在时刻的可靠度抽样值, 再评估系统的可靠性;

Bayes bootstrap 方法首先根据 Bayes 方法得出各单元寿命分布参数的点估计, 然后根据抽样得到各单元的 bootstrap 样本值, 分别估计各单元的可靠性参数, 算得系统可靠度的估计值, 重复以上步骤得到系统可靠度的组样本值后对系统可靠性参数进行评估。

double Bayes MC 方法重复 Bayes bootstrap 方法的步骤得到各单元的可靠性参数  $N$  个估计值, 进而得到单元可靠度的经验分布, 再从经验分布进行抽样得到单元可靠度的  $m$  个点估计, 推导出系统可靠度点估计, 重复以上步骤得到系统可靠性的参数估计。

2 表决系统的 Bayes 可靠性评估方法

2.1 无试验数据时系统可靠性评估

此时, 直接将上面得到的  $l$  个系统可靠度样本值  $R_s^j (j = 1 \sim l)$  进行升序排列, 得到:

$$R_s^1 \leq R_s^2 \leq \cdots \leq R_s^{l-1} \leq R_s^l \tag{4}$$

则, 对于系统可靠度  $R_s(t)$ , 有:  $P(R_s(t) > R_s^k(t)) \approx 1 - \frac{k}{l}$ , 所以  $R_s^k(t)$  近似为  $R_s(t)$  在置信水平是  $(1 - \frac{k}{l})$  的可靠度置信下限。或者给定置信水平  $(1 - \alpha)$  下的可靠度置信下限为:  $R_{sL}(t) = R_s^m(t)$ , 其中  $m = \max_k(\frac{k}{l} \leq \alpha)$ 。

2.2 存在试验数据时系统可靠性评估

可以直接由  $l$  个抽样值  $R_s^1, R_s^2, \cdots, R_s^{l-1}, R_s^l$  得到一个系统可靠度的近似的离散分布, 根据等概率分布原则,  $\pi(R_s^j(t)) = \frac{1}{l}, (j = 1 \sim l)$ , 由 Bayes 公式和试验数据的似然函数  $f(x | R_s^j(t))$ , 求得系统可靠度的验后分布为:

$$\pi(R_s^j(t) | x) = \frac{f(x | R_s^j(t)) \pi(R_s^j(t))}{\sum_{j=k}^l f(x | R_s^j(t)) \pi(R_s^j(t))} \tag{5}$$

由上式可得到系统可靠度的置信水平为  $(1 - \alpha)$  下的可靠度置信下限为  $R_{sL}(t) = R_s^m(t)$ , 其中:

$$m = \max_k \{P\{R_s(t) > R_s^k(t)\} = \sum_{j=k}^l P\{R_s^j | x\} \geq 1 - \alpha\} \tag{6}$$

2.3 多源试验数据的融合

当组成单元类型和系统试验数据都为成败型时, 此时可以根据 (5) 式直接计算其后验分布; 当系统试验数据为非成败型 (如寿命型) 数据时, 需要对系统可靠度样本值  $R_s^j$  进行转换。以下给出指数型试验数据系统可靠度样本值  $R_s^j$  的融合步骤, 文献<sup>[1]</sup>给出了其它类型试验数据的融合方法。

指数产品的失效密度为:

$$f(t) = \lambda_s^j e^{-\lambda_s^j t} \tag{7}$$

时刻  $t$  的可靠性函数为:

$$R_s^j(t) = 1 - \int_0^t \lambda_s^j e^{-\lambda_s^j \tau} d\tau = e^{-\lambda_s^j t} \tag{8}$$

根据共轭分布的原理<sup>[1]</sup>, 易得验后可靠度参数估计。

3 仿真实例

3.1 相同单元的  $k/n(G)$  系统的可靠性评估

表 1 为单元分布相同 (二项、指数等) 的  $2/3(G)$  系统的可靠度下限评估结果, 其中二项单元先验分布参数取  $s_{0i} = f_{0i} = 1/2$  指数单元先验分布参数取  $z_{0i} = 1/2, \eta_{0i} = 0$ 。

其中, Bayes 精确置信限依据式 (9)、(10) 求解。

表 1 单元分布相同时的  $2/3(G)$  系统可靠性评估结果表

Table 1 Table of  $2/3(G)$  System Reliability Assessment when the Unit Distribution are the Same

| 单元分布类型 | 单元试验数据                 | 置信度  | 精确置信下限 | Bayes MC 下限 | Bayes bootstrap 下限 | 和 double Bayes MC 下限 |
|--------|------------------------|------|--------|-------------|--------------------|----------------------|
| 二项型    | $S_i = 17, f_i = 3$    | 0.90 | 0.8148 | 0.8126      | 0.8345             | 0.8346               |
| 指数型    | $z_i = 3, \eta_i = 20$ | 0.90 | 0.8329 | 0.8416      | 0.8516             | 0.8518               |

万方数据

相同二项单元时的单元可靠度精确下限  
为

$$I_{R_i, LB}(s_i + 0.5, f_i + 0.5) = 1 - \gamma \quad (9)$$

其中,  $I_x$  为不完全贝塔函数。则系统可靠可靠度精确下限  $R_{L, B}$  为

$$R_{L, B} = \sum_{i=k}^n C_n^i R_{i, LB}^i (1 - R_{i, LB})^{n-i} \quad (10)$$

文献<sup>[3]</sup>给出了其它相同分布类型的单元及其组成表决系统的可靠度精确限计算公式。

### 3.2 组成单元分布不同, 并且系统试验数据为寿命型数据时 $k/n(G)$ 系统可靠性评估

当  $k/n(G)$  系统中各单元分布参数如(11)式, 系统试验数据分别为  $z_{0i} = 2, \eta_{0i} = 30$  和  $z_{0i} = 7, \eta_{0i} = 15$ 。此时, 根据  $k$  的不同取值(1~10), 应用 double Bayes Mc 方法计算系统可靠性参数, 图 1 给出的仿真结果表明(1)随着  $k/12(G)$  系统中  $k$  的增加, 系统仿真可靠度呈下降趋势; 当  $k \leq 3$  时, 系统可靠度置信下限接近 1, 而当  $k \geq 7$  时, 系统可靠度置信下限趋于 0.3 以下的低可靠度值, 与实际相符;(2)曲线 2 是试验数据为  $z_{0i} = 2, \eta_{0i} = 30$  时的结果, 其下限明显高于曲线 1, 曲线 3 是试验数据为  $z_{0i} = 7, \eta_{0i} = 15$  时的结果, 其下限低于曲线 1, 表明融合可信度较高的系统级试验数据对于系统可靠度具有明显的‘提升’作用。

$$s_1 = 19, f_1 = 1; s_2 = 39, f_2 = 1;$$

$$s_3 = 15, f_3 = 1; s_4 = 13, f_4 = 1;$$

$$\begin{aligned} z_5 = 1, \eta_5 = 13; z_6 = 1, \eta_6 = 20; \\ s_7 = 39, f_7 = 1; s_8 = 15, f_8 = 1; \\ s_9 = 15, f_9 = 13; z_{10} = 1, \eta_{10} = 13; \\ z_{11} = 1, \eta_{11} = 15; s_{12} = 18, f_{12} = 1 \end{aligned} \quad (11)$$

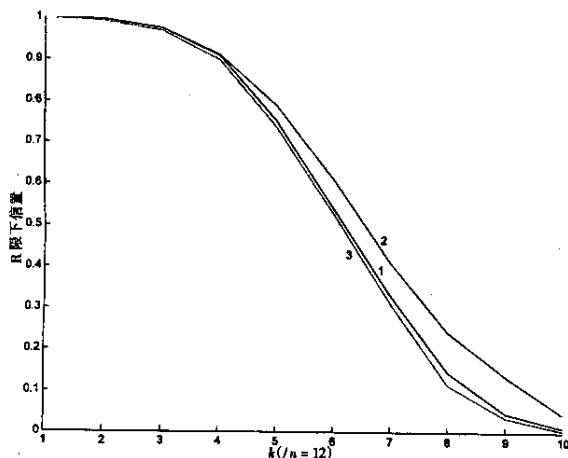


图 1  $k/n(G)$  ( $n=12, k=1 \sim 10$ ) 时系统可靠性评估的仿真计算结果

Fig.1 Calculation Result of the  $k/n(G)$  ( $n=12, k=1 \sim 10$ ) Reliability Assessment System

## 4 结束语

表决系统可靠性评估中, 系统可靠性的矩无法用单元验后矩显式表示, 因此, 本文提出了数字仿真的解决方法。仿真实例表明, 该方法适用于系统组成的各种情形, 评估结果可信, 也适用于它具有复杂系统特点的系统可靠性评估。

## 参考文献:

- [1] 张金槐, 唐雪梅. Bayes 方法[M]. 长沙: 国防科技大学出版社, 1993.
- [2] Dong Tang, Myron Hecht, Jeffrey Miller, Jady Handal. MEADep: A Dependability Evaluation Tool for Engineers[J]. IEEE Transactions on reliability, 1998, 47(4): 443-449.
- [3] Geist R, Trivedi K S. Reliability estimation of fault-tolerant systems: Tools and techniques[J]. IEEE Computer, 1990, 25(3): 123-128.
- [4] 高会璇. 统计计算[M]. 北京: 北京大学出版社, 1995.
- [5] 周源泉. 质量可靠性增长与评定方法[M]. 北京: 北京航空航天大学出版社, 1997.
- [6] 蒋仁言, 左明健. 可靠性模型与应用[M]. 北京: 机械工业出版社, 1999.

## Simulation for Vote System Bayesian Reliability Assessment

BAI Zhong-gan<sup>1,2</sup>, XIE Hong-wei<sup>1</sup>, LI Peng-bo<sup>1</sup>, ZHANG Xiang-ping<sup>1</sup>

(1. College of Mechatronics Engineering and Automation, National Univ. of Defense Technology, Changsha 410073, China)  
(2. Troop 63880)

**Abstract** Simulation for vote system Bayesian assessment is discussed. The method is based on the structure of the vote system and Bayesian theory on reliability. The components' posterior distribution of reliability can be obtained by the fusion of their aprior information. Three ways, including Bayesian Monte-Carlo, Bayesian bootstrap, Double Bayesian Monte-Carlo, are used in the simulation. Situations are considered respectively when the components' distribution types are the same or different from each other. Steps to calculate their reliability are given. Examples proved the feasibility of the simulation.

**Keywords** Reliability Assessment; Vote System; Bayesian Method; Monte-Carlo