

小阻尼简谐激励 Mathieu 方程的周期稳定性*

史友进

(盐城工学院 基础科学部, 江苏 盐城 224003)

摘 要:以复摆与弹簧摆构成的复合摆为例,在一定简化条件下推导出了小阻尼简谐激励 Mathieu 方程,研究了小阻尼简谐激励 Mathieu 方程周期解的稳定性,讨论了影响 Mathieu 方程周期解稳定性的因素。

关键词:简谐激励; Mathieu 方程; 周期解; 稳定性

中图分类号: O322

文献标识码: A

文章编号: 1671-532X(2004)01-0005-03

1 物理模型

考虑如图 1 所示的复摆与弹簧摆构成的复合摆。

复摆的质量 M , 转动惯量为 J , 质心到转轴的距离为 S 。弹簧摆摆块质量为 m , 弹簧的原长为 x_0 , 倔强系数为 k , 摆块所受粘滞阻尼力阻尼系数为 c 。摆块沿复摆直杆运动, 接触面设为光滑, 且设 M 远大于 m 。

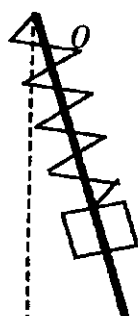


图 1 复合摆
Fig. 1 Compound Pendulum

2 系统运动微分方程

描述系统的运动用摆块到转轴的距离 x 和复摆直杆与铅垂线的夹角 θ 。根据拉格朗日方程, 可以求得系统的运动微分方程为:

$$\ddot{x} + c\dot{x} + k(x - x_0)x - mg\cos\theta - m\dot{\theta}^2 = 0 \quad (1)$$

$$(J + mx^2)\ddot{\theta} + 2mx\dot{\theta} + MgS\sin\theta = 0 \quad (2)$$

由于假设 M 远大于 m , 不计摆块对复摆的科氏力, 且利用小角近似, 式(2)可写成:

$$(J + my^2)\ddot{\theta} + K\theta = 0 \quad (3)$$

式中 $K = Mgs$ 。上式在初如条件 $\theta(0) = \Theta, \dot{\theta}(0) = 0$ 下的解为

$$\theta = \Theta \cos(\omega t) \quad (4)$$

将式(4)代入式(1), 利用 $\cos\theta \approx 1$, 并令式(1)写成:

$$\ddot{\zeta} + 2\beta\dot{\zeta} + [\alpha + 2\epsilon\cos 2\tau]\zeta = \rho\cos 2\tau \quad (5)$$

式中 $\tau = \omega t, \alpha = k/m\omega^2 - \Theta^2/2, \epsilon = \delta/2x_0 (\delta = \Theta^2\omega^2/2), \beta = c/2m, \rho = 2\delta/\omega^2, \zeta = x - x_0 + mg/k + \delta$ 。上式是有阻尼和简谐激励的 Mathieu 方程。

3 Mathieu 方程周期解的稳定性

用摄动法研究齐次 Mathieu 方程周期解稳定性边界的方法和结果可参考文献[2]。我们研究了非齐次 Mathieu 方程周期解稳定性边界特点, 发现与非齐次 Mathieu 方程周期解稳定性边界有差异。现将主要结论概述如下。

当 $\alpha = 0$ 时, 系统作 π 周期运动的稳定条件是

$$\alpha(\epsilon) = -\epsilon^2(2 - \rho/\alpha)/4 + O(\epsilon^3) \quad (6)$$

π 周期解为

$$\zeta = \alpha + \frac{2\alpha - \rho}{4}[\epsilon\cos(2t) - \beta\sin(2t)] - \frac{2\alpha - \rho}{64}\epsilon^2\cos(4t) + O(\epsilon^3) \quad (7)$$

当 $\alpha = 1$ 时, 系统作 2π 周期运动的稳定条件是

$$\begin{cases} |\beta| < \epsilon/2 \\ \alpha(\epsilon) = 1 \pm \sqrt{\epsilon^2 - 4\beta^2} - \epsilon^2/8 - 2\beta\rho/3b + O(\epsilon^3) \end{cases} \quad (8)$$

* 收稿日期: 2003-12-10

作者简介: 史友进(1960-), 男, 江苏海安人, 盐城工学院基础科学部副教授, 南京航空航天大学在读博士。

2π 周期解为

$$\zeta = (a - \rho/3)\cos(t) + b\sin(t) + \epsilon[a\cos(3t) + b\sin(3t)]/8 - \rho\cos(3t)/24 + \frac{\epsilon}{64}\{\pm\sqrt{\epsilon^2 - 4\beta^2}[a\cos(3t) + b\sin(3t)] + \epsilon[a\cos(5t) + b\sin(5t)]/3\} + O(\epsilon^3) \quad (9)$$

当 $a=2$ 时,系统作周期运动的稳定条件是

$$\begin{cases} \beta = O(\epsilon^2) \\ \rho = O(\epsilon^3) \\ \alpha(\epsilon) = 4 + \epsilon^2/6 \pm \sqrt{\epsilon^4/16 + 16\beta^2} + O(\epsilon^3) \end{cases} \quad (10)$$

2π 周期解为

$$\zeta = a\cos(t) + b\sin(bt) - \epsilon[3a - a\cos(4t) - b\sin(2t)]/12 + \epsilon^2[a\cos(6t) + b\sin(6t)]/384 + O(\epsilon^3) \quad (11)$$

4 Mathieu 方程稳定性的影响因素

由式(6)式(8)及式(10)可知,系统周期解稳

定性取决于 $\alpha, \epsilon, \beta, \rho, a$ 和 b 6 个参量,其中 α, ϵ 和 β 是描述系统本征特性的物理量, ρ, a 和 b 是由初始条件决定的物理量。因此,影响 Mathieu 方程稳定性既与内部因素有关,也与外部因素有关。

Mathieu 方程的稳定区域如图 2 所示。图 2(a)是 $\beta=0, \rho=0$ 条件下 Mathieu 方程的稳定区域;图 2(b)是 $\beta=0, 1(\alpha=0 \text{ 或 } \alpha=1), \beta=0, 1(\alpha=2), \rho=0$ 条件下 Mathieu 方程的稳定区域;图 2(c)是 $\beta=0, 1(\alpha=0 \text{ 或 } \alpha=1), \beta=0, 1(\alpha=2), \rho/\alpha=\rho/b=1$ 条件下 Mathieu 方程的稳定区域;图 2(d)是 $\beta=0, 1(\alpha=0 \text{ 或 } \alpha=1), \beta=0, 1(\alpha=2), \rho/\alpha=\rho/b=3$ 条件下 Mathieu 方程的稳定区域。

比较图 2(a)和图 2(b)可见,在 $\rho=0$ 条件下,增大 β 使 Mathieu 方程的稳定区域增大;比较图 2(b)和图 2(c)及图 2(d)可见,增大 ρ 使 Mathieu 方程的稳定区域减小,这在低频区较为明显,尤其在图 2(d)中,即当 $\rho/\alpha=\rho/b=3$ 时,对应于 $\alpha=0$ 和 $\alpha=1$ 的 Mathieu 方程稳定区域的边界线相交, Mathieu 方程的稳定区域显著减小。当 $\beta \neq 0$ 时, α

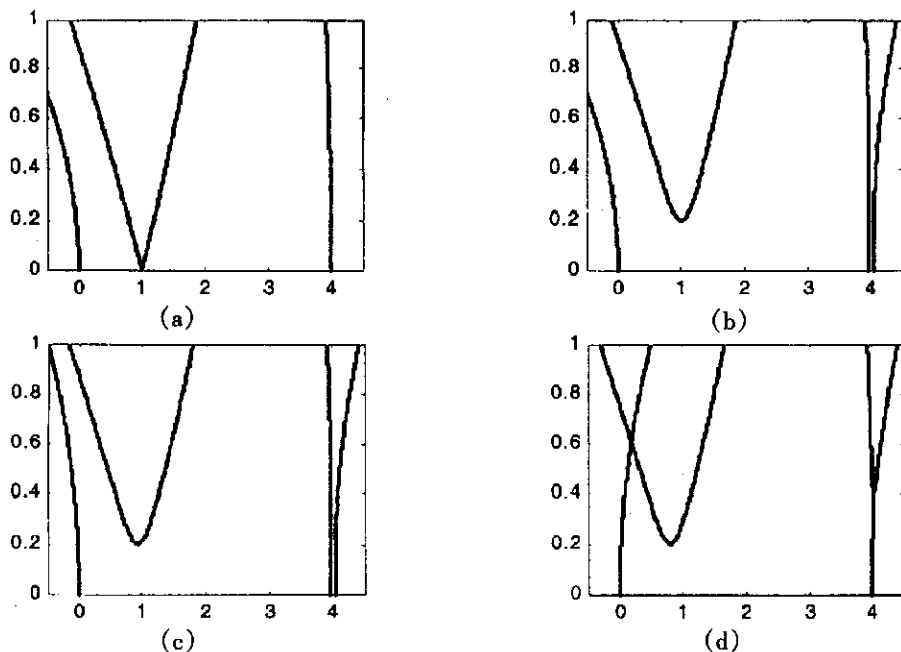


图 2 稳定性边界

Fig.2 Domain of steadiness

$=4$ 在非稳定区域内,这应该特别引起注意。由图 2(a)可见,当 $\beta=0$ 时,直线 $\alpha=0$ 与 $\alpha=1$ 的 Mathieu 方程稳定区域的边界线相交处, $\epsilon \approx 0.9$ 。这表明,当 $\alpha=0, \epsilon < 0.9$ Mathieu 方程的解稳定;当 $\alpha=0, \epsilon > 0.9$ Mathieu 方程的解稳定。用龙格—库塔数值积分方法对无阻尼 Mathieu 方程解的万方数据

模拟验证了这一结论。模拟得到的相图如图 3(a)和图 3(b)所示。图 3 是在相同初始条件 $\zeta_0=0.05, \dot{\zeta}_0=0.05$ 下用龙格—库塔数值积分方法解 Mathieu 方程的模拟结果。图 3(a)为 $\epsilon=0.85$ 时的模拟结果,表明 Mathieu 方程的解稳定;图 3(b)为 $\epsilon=0.95$ 时的模拟结果,表明 Mathieu 方程的解非

稳定 ;图 3(c)为 $\alpha = 0.3, \varepsilon = 0.35, \rho/\alpha = \rho/b = 3$ 时的模拟结果 ,表明 Mathieu 方程的解稳定 ;图 3

(d)为 $\alpha = 4, \varepsilon = 0.35, \rho/\alpha = \rho/b = 3$ 时的模拟结果 ,表明 Mathieu 方程的解非稳定。

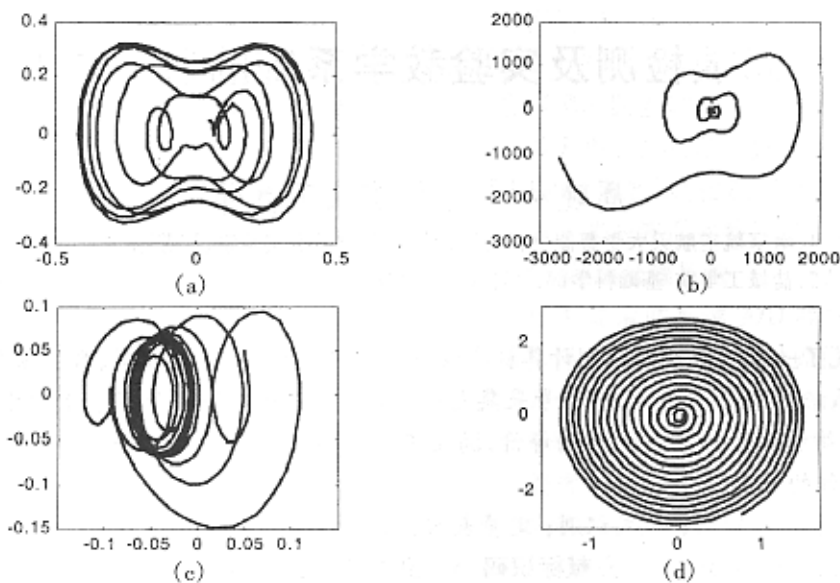


图 3 Mathieu 方程的龙格—库塔数值解的相图

Fig.3 Phase figure of the solutions of Mathieu equation

参考文献 :

- [1] Tung C C ,Penzien T ,Hornjeff R. The Effect of Runway Unevenness on the Dynamic Response of Supersonic Transports[R]. NASA , CR - 119 ,1964.
- [2] 胡海岩.应用非线性动力学[M].北京 航空工业出版社 2000.

Steadiness of harmonic exciting Mathieu equation with small damping

SHI You-jin

(Department of Basic Science of Yancheng Institute of Technology ,Jiangsu Yancheng 224003 ,China)

Abstract : A coupled pendulum model is used to obtain harmonic exciting Mathieu equation with small damping under some simplification. Steadiness of periodical solutions of the equation is studied and the factors affecting the steadiness discussed.

Keywords harmonic exciting ; Mathieu equation ; periodical solves ; steadiness