

求解对流扩散方程的一类交替分组显式方法^{*}

黄素珍

(南京航空航天大学 理学院, 江苏 南京 210016)

摘 要 利用第二类 Saul'yev 非对称格式给出了对流扩散方程的一类交替分组显格式。该方法具有并行本性,并且绝对稳定。数值结果表明,对对流扩散方程给出的 AGE 算法明显优于 Evans 和 Abdullah^[2]所提出的交替分组显格式,因此本方法是一种有效算法。

关键词 交替分组显式方法;非对称差分格式;绝对稳定;并行计算

中图分类号: O241

文献标识码: A

文章编号: 1671-532X(2004)01-0012-05

本文考虑的对流扩散问题为

$$\frac{\partial u}{\partial t} + k_1 \frac{\partial u}{\partial x} = d \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad 0 \leq x \leq l, 0 < t < T; \quad (1)$$

$$u(x, 0) = f(x) \quad 0 < x < l; \quad (2)$$

$$u(0, t) = g_1(t), u(l, t) = g_2(t) \quad 0 < t < T; \quad (3)$$

求解(1)已有很多显式和隐式差分方法。显式方法很适合于并行计算,但由于稳定性条件的限制,必须采用非常小的时间步长来计算。隐式格式一般无条件稳定,但在每一时间层上要求解线性方程组,实现并行计算有一定困难。D.J. Evans 和 A.R.B. Abdullah^[1~2]巧妙地利用 Saul'yev 非对称格式,设计了适合于并行计算的交替分组显式(AGE)方法。张宝琳等^[3~4]又提出了交替分段、分块的显-隐方法。王文治^[5]利用第二类 Saul'yev 非对称格式,构造了扩散方程的一类分组显格式。本文根据文献[5]中关于扩散问题的方法,并采用不同于文献[3]的对流项处理方式,给出了对流扩散方程的一类交替分组显格式,分析了方法的稳定性。数值试验结果表明,方法使用方便,适合并行计算,并且有较好的精度。

1 交替分组显式方法

首先将区域 $(0, l) \times (0, T)$ 进行剖分,记空间步长 $h = l/L$, 时间步长为 $\tau = [T/N]$, $x_i = ih$ ($i = 0, 1, \dots, L$), $t_n = n\tau$ ($n = 0, 1, \dots, N$)。记 $r = \frac{d\tau}{h^2}$, $p = \frac{k_1\tau}{2h}$,

则方程(1)的显式格式为

$$U_i^{n+1} - U_i^n + p(U_{i+1}^n - U_{i-1}^n) = r(U_{i+1}^n - 2U_i^n + U_{i-1}^n),$$

初始条件和边界条件分别离散为

$$U_1^0 = f(ih) \quad (i = 1, \dots, L-1); U_0^n = g_1(n\tau), U_L^n = g_2(n\tau) \quad (n = 1, \dots, N).$$

逼近方程(1.1)的隐式格式为

$$U_i^{n+1} - U_i^n + p(U_{i+1}^{n+1} - U_{i-1}^{n+1}) = r(U_{i+1}^{n+1} - 2U_i^{n+1} + U_{i-1}^{n+1}).$$

再给出以下 4 个第二类 Saul'yev 非对称格式^[6]为

$$-\frac{1}{2}(p+r)U_{i-1}^{n+1} + (1+\frac{r}{2})U_i^{n+1} = \frac{1}{2}(p+r)U_{i-1}^n + (1-\frac{3r}{2})U_i^n - (p-r)U_{i+1}^n, \quad (4)$$

^{*} 收稿日期: 2003-11-6

作者简介: 黄素珍(1976-),女,江苏大丰市人,盐城工学院助教,南京航空航天大学在职项士研究生。

$$(1 + \frac{r}{2})U_i^{n+1} + \frac{1}{2}(p-r)U_{i+1}^{n+1} = (p+r)U_{i-1}^n + (1 - \frac{3r}{2})U_i^n - \frac{1}{2}(p-r)U_{i+1}^n, \quad (5)$$

$$-\frac{1}{2}(p+r)U_{i-1}^{n+1} + (1 + \frac{3r}{2})U_i^{n+1} + (p-r)U_{i+1}^{n+1} = \frac{1}{2}(p+r)U_{i-1}^n + (1 - \frac{r}{2})U_i^n, \quad (6)$$

$$-(p+r)U_{i-1}^{n+1} + (1 + \frac{3r}{2})U_i^{n+1} + \frac{1}{2}(p-r)U_{i+1}^{n+1} = (1 - \frac{r}{2})U_i^n - \frac{1}{2}(p-r)U_{i+1}^n \quad (7)$$

在交替分组方法的设计中,我们还用到三种分组模式:由四个空间坐标是 $I_j+1, I_j+2, I_j+3, I_j+4$ 的内点组成的 GM 组、靠近左边界的两内点组成的 GL 组和靠近右边界的两内点组成的 GR 组。在 GM 组上对方程从左至右依次应用(2.2)(2.3)(2.4)和(2.1)式构造差分格式

$$\begin{cases} 1 + \frac{r}{2} U_{I_j+1}^{n+1} + \frac{1}{2}(p-r)U_{I_j+2}^{n+1} = (p+r)U_{I_j}^n + (1 - \frac{3r}{2})U_{I_j+1}^n - \frac{1}{2}(p-r)U_{I_j+2}^n, \\ -\frac{1}{2}(p+r)U_{I_j+1}^{n+1} + (1 + \frac{3r}{2})U_{I_j+2}^{n+1} + (p-r)U_{I_j+3}^{n+1} = \frac{1}{2}(p+r)U_{I_j+1}^n + (1 - \frac{r}{2})U_{I_j+2}^n, \\ -(p+r)U_{I_j+2}^{n+1} + (1 + \frac{3r}{2})U_{I_j+3}^{n+1} + \frac{1}{2}(p-r)U_{I_j+4}^{n+1} = (1 - \frac{r}{2})U_{I_j+3}^n - \frac{1}{2}(p-r)U_{I_j+4}^n, \\ -\frac{1}{2}(p+r)U_{I_j+3}^{n+1} + (1 + \frac{r}{2})U_{I_j+4}^{n+1} = \frac{1}{2}(p+r)U_{I_j+3}^n + (1 - \frac{3r}{2})U_{I_j+4}^n - (p-r)U_{I_j+5}^n. \end{cases} \quad (8)$$

若记 $\overline{U}_i^n = (U_{I_j+1}^n, U_{I_j+2}^n, U_{I_j+3}^n, U_{I_j+4}^n)^T$, $F_j = ((p+r)U_{I_j}^n, 0, 0, (p-r)U_{I_j+5}^n)^T$ (8)式的矩阵形式可写成

$$A \overline{U}_i^{n+1} = B \overline{U}_i^n + F_j, \quad (9)$$

$$\text{其中 } A = \begin{bmatrix} 1 + \frac{r}{2} & \frac{1}{2}(p-r) & & \\ -\frac{1}{2}(p+r) & 1 + \frac{3r}{2} & p-r & \\ & -(p+r) & 1 + \frac{3r}{2} & \frac{1}{2}(p-r) \\ & & -\frac{1}{2}(p+r) & 1 + \frac{r}{2} \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 - \frac{3r}{2} & -\frac{1}{2}(p-r) & & \\ \frac{1}{2}(p+r) & 1 - \frac{r}{2} & & \\ & & 1 - \frac{r}{2} & -\frac{1}{2}(p-r) \\ & & \frac{1}{2}(p+r) & 1 - \frac{3r}{2} \end{bmatrix}$$

因为 $\det(A) = 1 + 4r + \frac{9}{2}r^2 + 2r^3 + \frac{5}{16}r^4 + \frac{1}{16}p^4 + p^2(\frac{5}{8}r^2 + 2r + \frac{3}{2}) \neq 0$, 所以 A 可逆。于是由(9)可以显式地求出 $\overline{U}_i^{n+1}$: $\overline{U}_i^{n+1} = A^{-1}B \overline{U}_i^n + A^{-1}F_j$ 。

另外,在 GL 和 GR 组上对方程(1)分别构造由非对称格式组成的差分格式(10)和(11)如下:

$$\begin{cases} (1 + \frac{3r}{2})U_1^{n+1} + \frac{1}{2}(p-r)U_2^{n+1} = (1 - \frac{r}{2})U_1^n - \frac{1}{2}(p-r)U_2^n + (p+r)U_0^{n+1}, \\ -\frac{1}{2}(p+r)U_1^{n+1} + (1 + \frac{r}{2})U_2^{n+1} = \frac{1}{2}(p+r)U_1^n + (1 - \frac{3r}{2})U_2^n - (p-r)U_3^n. \end{cases} \quad (10)$$

$$\begin{cases} (1 + \frac{r}{2})U_{L-2}^{n+1} + \frac{1}{2}(p-r)U_{L-1}^{n+1} = (p+r)U_{L-3}^{n+1} + (1 - \frac{3r}{2})U_{L-2}^n - \frac{1}{2}(p-r)U_{L-1}^n, \\ -\frac{1}{2}(p+r)U_{L-2}^{n+1} + (1 + \frac{3r}{2})U_{L-1}^{n+1} = \frac{1}{2}(p+r)U_{L-2}^n + (1 - \frac{r}{2})U_{L-1}^n - (p-r)U_L^{n+1}. \end{cases} \quad (11)$$

若记 $c = 1 + 2r + \frac{1}{4}p^2 + \frac{1}{2}r^2$, 则由(10)可以显式地求出 U_1^{n+1}, U_2^{n+1} 为

$$U_1^{n+1} = \frac{1}{4}p^2 U_1^n - \frac{1}{2}(p-r)(2-r)U_2^n + \frac{1}{2}(p-r)U_3^n + (1 + \frac{r}{2})(p+r)U_0^{n+1} \text{ 及 } c,$$

$$U_2^{n+1} = \left[\frac{1}{2}(p+r)(2+r)U_1^n + \left(1 - \frac{1}{4}p^2 - 2r^2\right)U_2^n - \left(1 + \frac{3r}{2}\right)(p-r)U_3^n + \frac{1}{2}(p+r)U_0^{n+1} \right] c.$$

由(11)可以显式地求出 $U_{L-2}^{n+1}, U_{L-1}^{n+1}$ 为

$$U_{L-2}^{n+1} = \left[(p+r)\left(1 + \frac{3r}{2}\right)U_{L-3}^n + \left(1 - \frac{1}{4}p^2 - 2r^2\right)U_{L-2}^n - \frac{1}{2}(p-r)(2+r)U_{L-1}^n + \frac{1}{2}(p-r)U_L^{n+1} \right] c,$$

$$U_{L-1}^{n+1} = \left[\frac{1}{2}(p+r)U_{L-3}^n + \frac{1}{2}(p+r)(2-r)U_{L-2}^n + \left(1 - \frac{1}{4}p^2\right)U_{L-1}^n - \left(1 + \frac{r}{2}\right)(p-r)U_L^{n+1} \right] c.$$

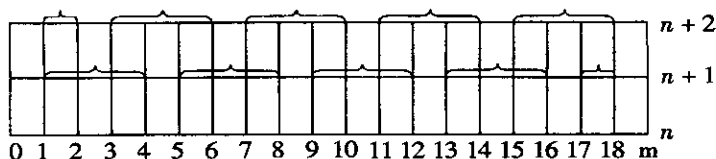


图 1 $m=19, n$ 为偶数时两个时间层上节点的分组模式

Fig.1 The group mode of the points on two levels at $m=19$ and n is even number

现在我们给出交替分组差分格式,考虑分点数 m 是奇数的情况,此时内点数 $m-1$ 是偶数。我们分两种情况讨论节点的分组模式:

当 $m-1=4k+2$ 时,设 n 为偶数,我们在两个时间层上交替构造分组差分格式(如图1),首先把 t_{n+1} 层上的内点划分成 $k+1$ 个计算组。从左至右,从第1组至第 k 组,连续 k 个四点 GM 组,每组都用格式(8),剩下的两点为 GR 两点组,应用格式(11)。其次,在第 t_{n+2} 时间层上也划分成 $k+1$ 个独立计算组,从左至右,第一组为 GL 两点组,应用格式(10),第2组至第 $k+1$ 组是 GM 四点组,应用格式(8)。两层格式交替使用,于是得到交替分组显式(AGE)方法,其差分格式的矩阵形式是

$$\begin{cases} (I + rG_1)U^{n+1} = (I - rG_2)U^n + b_1, \\ (I + rG_2)U^{n+2} = (I - rG_1)U^n + b_2. \end{cases} \quad (12)$$

式中 $U^n = (U_1^n, U_2^n, \dots, U_{L-1}^n)^T$, $b_1 = ((p+r)U_0^{n+1}, 0, \dots, 0, -(p-r)U_{L-1}^{n+1})^T$, $b_2 = ((p+r)U_0^{n+2}, 0, \dots, 0, -(p-r)U_{L-1}^{n+1})^T$, b_1 和 b_2 是与边界条件有关的 $L-1$ 维向量。记 $q = \frac{p}{r}$ 。

$$G_1 = \begin{bmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_k \\ & & & & A' \end{bmatrix}, G_2 = \begin{bmatrix} A'' & & & \\ & A_1 & & \\ & & A_2 & \\ & & & \ddots & \\ & & & & A_k \end{bmatrix};$$

$$A_j = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2}(q-1) & & \\ -\frac{1}{2}(q+1) & \frac{3}{2} & & q-1 \\ & -(q+1) & \frac{3}{2} & \frac{1}{2}(q-1) \\ & & -\frac{1}{2}(q+1) & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, j=1, 2, \dots, k;$$

$$A' = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2}(q-1) \\ -\frac{1}{2}(q+1) & \frac{3}{2} \end{bmatrix}; A'' = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2}(q-1) \\ -\frac{1}{2}(q+1) & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

当 $m-1=4k$ 时,设 n 为偶数,同样,我们在两个时间层上交替构造分组差分格式,在 t_{n+1} 层上划分 $k+1$ 个独立计算组。在靠近左边界和右边界的两点组分别应用格式(10)和(11),从第2组至第 k 组,连续 $k-1$ 个四点组,应用格式(8)。在 t_{n+2} 层上划分 k 个独立计算组,每组都是使用格式(8)的 GM 四点组。两层格式交替使用,于是得到交替分组显式(AGE)方法,其差分格式的矩阵形式是

$$\begin{cases} (I + r\hat{G}_1)U^{n+1} = (I - r\hat{G}_2)U^n + b, \\ (I + r\hat{G}_2)U^{n+1} = (I - r\hat{G}_1)U^{n+1} + b. \end{cases} \quad (13)$$

$b = ((p+r)U_0^{m+1}, 0, \dots, 0, -(p-r)U_{(L-1)}^{m+1})^T$, b 是与边界条件有关的 $L-1$ 维向量。

$$\hat{G}_1 = \begin{bmatrix} A'' & & & \\ & A_1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_{k-1} \\ & & & & A' \end{bmatrix}, \hat{G}_2 = \begin{bmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & A_3 & \\ & & & \ddots \\ & & & & A_k \end{bmatrix}.$$

另外,我们还可以利用(12)和(13)构造如下的(D)AGE格式:

$$\begin{cases} (I + rG_1)U^{m+1} = (I - rG_2)U^m + b_1, \\ (I + rG_2)U^{m+2} = (I - rG_1)U^{m+1} + b_2, \\ (I + rG_2)U^{m+3} = (I - rG_1)U^{m+2} + b_3, \\ (I + rG_1)U^{m+4} = (I - rG_2)U^{m+3} + b_4. \end{cases} \quad (14)$$

$$\begin{cases} (I + r\hat{G}_1)U^{m+1} = (I - r\hat{G}_2)U^m + \bar{b}_1, \\ (I + r\hat{G}_2)U^{m+2} = (I - r\hat{G}_1)U^{m+1} + \bar{b}_2, \\ (I + r\hat{G}_2)U^{m+3} = (I - r\hat{G}_1)U^{m+2} + \bar{b}_3, \\ (I + r\hat{G}_1)U^{m+4} = (I - r\hat{G}_2)U^{m+3} + \bar{b}_4. \end{cases} \quad (15)$$

式中 b_i 和 $\bar{b}_i$ 是与边界条件有关的向量。由(12)(13)(14)和(15)给出的交替分组显式方法具有并行本性,都可以直接进行并行计算。

2 稳定性分析

为了证明方法的稳定性,我们给出两个引理:

引理 2.1 由(12)(13)(14)和(15)表示的矩阵 $G_1, G_2, \hat{G}_1$ 和 $\hat{G}_2$ 均为非负实阵。

引理 2.2 (Kellogg^[7])设 $r > 0$, 矩阵 G 非负实阵, 则

$$\|(I + rG)^{-1}\|_2 \leq 1, \|(I - rG)(I + rG)^{-1}\|_2 \leq 1.$$

定理 2.1 求解对流扩散问题(1)(2)和(3)的交替分组显式方法(12)(13)(14)和(15)是绝对稳定的。

证明:容易知道,交替分组显式方法(12)的增长矩阵为

$$G = (I + rG_2)^{-1}(I - rG_1)(I + rG_1)^{-1}(I - rG_2).$$

定义 $\tilde{G} = (I + rG_2)G(I + rG_2)^{-1}$, 则 G 和 $\tilde{G}$ 相似, 故他们具有相同的特征值, 因此

$$\|G\|_2 = \|\tilde{G}\|_2 \leq \|(I - rG_1)(I + rG_1)^{-1}\|_2 \|(I - rG_2)(I + rG_2)^{-1}\|_2 \leq 1,$$

可见,交替分组显式方法(12)是绝对稳定的。

3 数值例子

为了说明本文给出的方法可用于对流扩散方程的计算,并有据可比,我们选用了与文献[2]相同的

算例。定解问题

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = \varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (0 < x < 1, 0 < t < T, \varepsilon > 0), \\ u(x, 0) = 0 \quad (0 < x < 1), \\ u(0, t) = 0, u(1, t) = 1 \quad (0 < t < T) \end{cases} \quad (16)$$

的精确解是^[2]

$$u(x, t) = \frac{e^{kx/\varepsilon} - 1}{e^{k/\varepsilon} - 1} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m m \pi}{(m\pi)^2 + (\frac{k}{2\varepsilon})^2} e^{k(x-1)/2\varepsilon} \sin(m\pi x) e^{-[(m\pi)^2 \varepsilon + k^2/4\varepsilon]t} \quad (17)$$

我们对例子(16)分别采用本文的格式(9)及相对应的 Evans 和 Abdullah^[2]的交替组显格式进行了计算,绝对误差和相对误差结果分别列在表 1 和表 2 中。

表 1 $k=1.0$ $\epsilon=1.0$ $\tau=0.0005$ $h=1/11$ $R_\Delta=0.045$ $t=0.4$ 时的数值结果
Table 1 The numerical results at $k=1.0$ $\epsilon=1.0$ $\tau=0.0005$ $h=1/11$ $R_\Delta=0.045$ $t=0.4$

$\chi(x_j)$	格式(9)			. Evans			精确解
	数值解	绝对误差	相对误差	数值解	绝对误差	相对误差	
1	0.047948	0.000122	0.002538	0.047999	7.1E-05	0.001477	0.04807
2	0.1011	0.00025	0.002467	0.10117	0.00018	0.001776	0.10135
3	0.1606	0.00036	0.002237	0.16072	0.00024	0.001491	0.16096
4	0.22766	0.00045	0.001973	0.22778	0.00033	0.001447	0.22811
5	0.30348	0.00052	0.001711	0.30363	0.00037	0.001217	0.304
6	0.38924	0.00056	0.001437	0.38939	0.00041	0.001052	0.3898
7	0.48603	0.00055	0.00113	0.48618	0.0004	0.000822	0.48658
8	0.5948	0.00048	0.000806	0.59494	0.00034	0.000571	0.59528
9	0.71634	0.00036	0.000502	0.71643	0.00027	0.000377	0.7167
10	0.85125	0.0002	0.000235	0.85133	0.00012	0.000141	0.85145

表 2 $k=1.0$ $\epsilon=1.0$ $\tau=0.0005$ $h=1/11$ $R_\Delta=0.45$ $t=0.4$ 时的数值结果
Table 2 The numerical results at $k=1.0$ $\epsilon=1.0$ $\tau=0.0005$ $h=1/11$ $R_\Delta=0.45$ $t=0.4$

$\chi(x_j)$	格式(9)			. Evans	精确解
	数值解	绝对误差	相对误差		
1	3.37E-05	2.69E-04	8.89E-01	不稳定	0.00030287
2	0.00011738	7.68E-04	8.67E-01		0.00088542
3	0.00032676	1.91E-03	8.54E-01		0.0022353
4	0.00085866	4.57E-03	8.42E-01		0.0054243
5	0.0022541	1.05E-02	8.23E-01		0.012763
6	0.0060905	2.28E-02	7.89E-01		0.028853
7	0.017081	4.47E-02	7.24E-01		0.061799
8	0.04891	7.46E-02	6.04E-01		0.12347
9	0.13872	8.80E-02	3.88E-01		0.22675
10	0.38036	-1.83E-03	-4.83E-03		0.37853

数值结果表明,本文对对流扩散方程给出的 AGE 算法明显优于 Evans 和 Abdullah^[2]所提出的 AGE 算法,因此本文方法是一种有效算法。

参考文献：

[1] Evans D J ,Abdullah A R. Alternating Group Explicit Methods for the Diffusion Equation[J]. Appli Math Modelling ,1985 ,9 :201 - 206.

[2] Evans D J ,Abdullah A R. A New Explicit Method for the Diffusion - convection Equations[J]. Comp and Math with Appl ,1985 ,11 : 145 - 154.

[3] 陆金甫,张宝琳,徐涛.求解对流扩散方程的交替分段显-隐式方法[J].数值计算与计算机应用,1998 ,19 :161 - 167.

[4] 张宝琳,符鸿源.一类交替块 Crank - Nicolson 方法的差分图[J].科学通报,1999 A(11) :1148 - 1152.

[5] 王文洽.求解扩散方程的一类交替分组显式方法[J].山东大学学报,2002 ,37(3) :194 - 199.

[6] Saul'yev V K. Integration of Techniques for Fluid Dynamics[M]. Berlin :Springer - Verlag ,1998.

[7] Kellog R B. An alternating direction method for operator equations[J]. SIAM ,1964 ,12(6) :848 - 854.

A Class Alternating Group Explicit Method for Solving Convection - Diffusion Equation

HUANG Su-zhen

(Department of Basic Science of Yancheng Institute of Technology Jiangsu Yancheng 224003 ,China)

Abstract :Based on the Saul'yev asymmetric schemes , a new alternating group explicit(AGE)method for solving convection - diffusion equation is derived in this paper. The method has the obvious property of parallelism and is unconditionally stable. Numerical example is given which illustrated that the present method is in preference to Evans and Abdullah 'AGE method for solving the convection - diffusion equation^[2]

Keywords :Alternating Group Explicit Scheme ; asymmetric difference schemes ; unconditionally stable ; parallel computing