梯子下滑过程中的微分方程及其求解*

叶　明
(江苏常熟高等专科学校 数学系,江苏 常熟　215500)

摘　要:由于微积分在物理学中具有广泛的应用,因此在数学分析教学中适时地加强综合应用练习,不仅有利于学生巩固微积分基本概念,而且有助于提高学生分析问题解决问题的能力。但选择此类应用性模型问题时,一定要尽量与实际相符,如在探索物体运动方程时,其物理背景应与物理中的基本定律相符。本文就高等数学教学中常被采用的一个物理模型问题提出质疑,并利用 Mathematica 给出与实际背景基本相符的运动轨迹。

关键词:微积分;Mathematica;数学建模
中图分类号:O117　　**文献标识码**:A　　**文章编号**:1671-5322(2004)01-0076-03

微积分是一门经典学科。长期以来,在微积分教学中,侧重于基础理论知识的传授。按照国家教委面向 21 世纪教学改革精神,数学教学在传授数学知识的同时,应着力于提高学生的数学素养和能力,培养学生应用数学知识解决实际问题的意识、兴趣和能力。因此在微积分教学中应适时加强综合应用练习,并在教学中注意溶入现代教学手段,给学生创设数学实验环境,Mathematica 是一个比较理想的工具。本文就日常生活中常见的一个模型问题(即下滑梯子),先对通常的处理方法提出了质疑,然后结合物理知识推得模型问题实际满足的微分方程,利用 Mathematica 对微分方程进行了求解,并利用其丰富的作图功能[1],绘出了模型的运动规迹,整个过程即为:发现问题→分析问题→解决问题的过程。

1　问题背景

下滑梯子的建模是一个比较经典的问题,问题的一般提法[2]:

一个长为 L 的梯子斜靠在墙上(图 1),当梯子底端以速率 k 向外匀速滑动时,梯子上距顶端 $L/3$ 处的 P 点的轨迹是什么?当顶端 A 落地时,A 点的速率为多少?

处理这个问题时,通常假设在梯子下滑过程中,梯子顶端始终保持与墙面接触,在这样的假设下,若引进坐标系,并以梯子与地面的夹角 θ 作为参数,则很容易得到关于点 P 坐标 (x, y) 的参数方程:

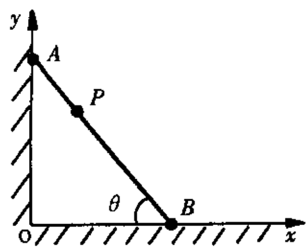

图 1　梯子下滑起始状态

Fig.1　Initial state of ladder's moving

$$\begin{cases} x = \dfrac{L}{3}\cos\theta \\ y = \dfrac{2L}{3}\sin\theta \end{cases} \quad \theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$$

可见 P 点的轨迹是椭圆。给定 $L = 5$ m,$k = 1$ m/s,$g = 9.8$ m/s^2,则轨迹为图 2。为了推导梯子下滑过程顶点 A 的下移速度,设点 A 的坐标为 $(0, y(t))$,而点 B 的坐标为 $(x(t), 0)$,则根据勾股定理,成立:$x^2 + y^2 = L^2$,两边关于 x 求导,得:

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{x}{y}\frac{dx}{dt} = -\frac{kx}{y} \tag{1}$$

从而可得顶点 A 的下移速度。据此,当顶点

---

* 收稿日期:2003-11-12
作者简介:叶　明(1957-),男,江苏常熟人,江苏常熟高等专科学校数学系讲师,硕士。

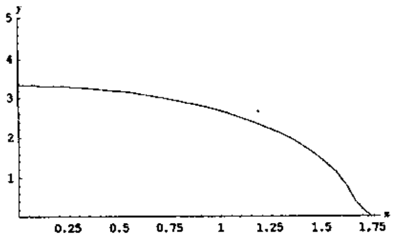

图 2　点 P 的轨迹(顶端 A 始终接触墙面)

Fig.2　The trace of point A

趋近于地面时,顶点 A 的速率趋于无穷大。由此推断:当梯子下滑过程中,一定存在某个时刻 t^*,此时,梯子顶点的下滑速率超过光速。显然这样的模型不切实际。造成错误结论的原因在于梯子下滑过程顶端始终与墙面保持接触的假设不能成立,即在下滑过程中某个时刻开始,梯子顶端将与墙面脱离接触。那么,这样的临界点如何确定?另外,点 P 的实际轨迹如何?

2　模型建立及处理

假设梯子下滑过程中,顶端与墙面脱离时,顶端 A 离地面的高度为 y_c,梯子与地面夹角为 θ_c(见图 3),则当 $\theta \in [\theta_c, \frac{\pi}{2}]$ 时,梯子顶端 A 的坐标 $(0, y)$ 满足微分方程(1),

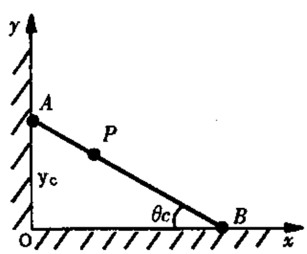

图 3　梯子下滑临界状态

Fig.3　Critical behaviour of ladder 's moving

又因为 $y = L\sin\theta$ 所以 $y' = (L\cos)\theta' = x\theta'$

即 $\theta' = -\dfrac{k}{2\sin\theta}$　　(2)

从而 $\theta'' = \dfrac{k\cos\theta}{L\sin^2\theta}\theta' = -\dfrac{k^2\cos\theta}{L^2\sin^2\theta}$　　(3)

而当 $\theta \in [0, \theta_c]$ 时,梯子的运动可看作支点 B 作匀速直线运动的一个刚性摆模型,根据刚体绕定轴转动的动力学方程,外力作用于刚体上的力矩等于刚体惯量与刚体绕定轴转动的角加速度乘积。此时梯子作为一个刚性摆,相对支点 B 的力矩 $\tau = mg\dfrac{L\cos\theta}{2}$,而惯量 $I = \int_0^L x^2\dfrac{m}{L}\mathrm{d}x = \dfrac{1}{3}mL^2$,角加速度:

$$\omega = (\pi - \theta)'' = -\theta''$$

所以,成立 $\frac{1}{3}mL^2(-\theta'') = \frac{1}{2}mgL\cos\theta$,即

$$\theta'' = -\frac{3g}{2L}\cos\theta \qquad (4)$$

给定 $L = 5$ m, $k = 1$ m/s, $g = 9.8$ m/s^2,在以 θ'' 为纵轴,θ 为横轴的坐标系中绘出(3)(4)的图形(见图 4)。

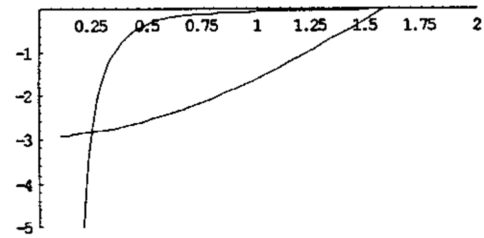

图 4　临界点对应的夹角 θ

Fig.4　The angle θ of critical point

两条曲线的交点处的 θ 值即为 θ_c,得 $\theta_c \approx 0.24$,当取 L, k 为一般参数时,联立方程(3)(4),得

$$\sin^2\theta_c = \frac{2k^2}{3gL} \qquad (5)$$

若 $\frac{2k^2}{3gL} \geq 1$,即 $k \geq \sqrt{\frac{3gL}{2}}$,则方程(4)无解。说明滑动一经开始,梯子的顶端就与墙面脱离。否则,可求得 $y_c \geq (\frac{2k^2L^2}{3g})^{\frac{1}{3}}$

因为当 $\theta \in [\theta_c, \frac{\pi}{2}]$ 时,有 $y'' = -(k^2L^2)/y^3$,

所以 $y''_c = -\dfrac{3}{2}g$

这一有意思的结果说明,不管梯子多长,底端滑动速度多大,在临界点处点 A 的下滑加速度始终为常数。当时 $\theta \in [0, \theta_c]$,A 点坐标 (x, y) 满足方程:

$$\begin{cases} x = x_c + kt - L\cos\theta(t) \\ y = L\sin\theta(t) \end{cases} \quad t \geq 0 \qquad (6)$$

这里 $\theta(t)$ 满足微分方程:

$$\begin{cases} \theta'' = -\dfrac{3g}{2L}\cos\theta \\ \theta(0) = \theta_c = \arcsin(\dfrac{2k^2}{3gL})^{\frac{1}{3}} \\ \theta'(0) = -\dfrac{k}{L\sin\theta_c} = -\dfrac{3gk}{2Ll^2})^{\frac{1}{3}} \end{cases} \qquad (7)$$

当 $L = 5$ m, $k = 1$ m/s, $g = 9.8$ m/s^2 时,微分方程

为：

$$\begin{cases}\theta'' = -2.94\cos\theta \\ \theta(0) = \theta_c = 0.24, \theta'(0) = -0.84\end{cases} \tag{8}$$

借助 Mathematica 对方程(8)进行数值求解,代入方程(6),可绘出顶端 A 点轨迹(见图 5)。

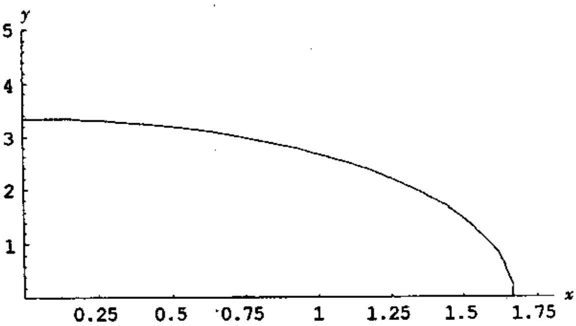

图 5 顶点 A 的轨迹

Fig.5 The trace of point A

得 $y_c = 1.19$,即当梯子端点 A 离地面高为 1.19 m 时,脱离墙面。

令 $\theta = 0$,解得 $t = 0.21$ s,此时 $y' = -7.28$。

即当 A 点接触地面时,A 点向下速率为 -7.28 m/s,A 点离墙距离为 0.065 m。

另外,当 $\theta \in [0, \theta_c]$ 时,点 $P(x, y)$ 满足的方程为：

$$\begin{cases} x = x_c + kt - \dfrac{2L}{3}\cos\theta(t) \\ y = \dfrac{2L}{3}\sin\theta(t)\end{cases} \quad t \geq 0$$

而当 $\theta \in [\theta_c, \frac{\pi}{2}]$ 时,方程为

$$\begin{cases} x = \dfrac{L}{3}\cos\theta(t) \\ y = \dfrac{2L}{3}\sin\theta(t)\end{cases} \quad t \geq 0$$

利用 Mathematica 绘制 P 点的轨迹如图 6。

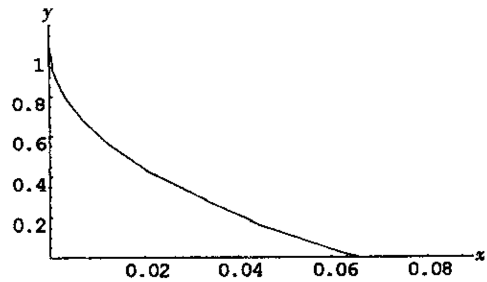

图 6 点 P 的轨迹

Fig.5 The trace of point P

诚然,如此建立关于梯子下滑的数学模型较实际的物理模型作了一些简化,如这里没有考虑墙面及地面与梯子接触点处的摩擦力的作用,而且假设梯子底端 B 点作匀速运动而不是变速运动,若进一步考虑这些因素,相应的数学模型将更为复杂,有待深入研究。

参考文献：

[1] 洪维恩.数学运算大师 Mathematica 4[M].北京:人民邮电出版社,2002.

[2] Edwards C H, Penney D. Calculus with Analytic Geometry[M].Prentice Hall,Englewood Cliffs, NJ,1994.

Differential Equation and its Solution on the Falling Ladder

YE Ming

(Department of Mathematics, Changshu College,Jiangsu, Changshu 215500,China)

Abstract:Calculus has a wide application in Physics. so certain comprehensive exercises in teaching will result in both the solidification of its fundamental concepts and the enhancement of abilities for one's finding and solving problems. You must take note of the accordance with reality when you choose such exercises. If you try to give the mathematical model of an object's motion, it must be accord with the basic physics laws. This paper is to give a revision of the mathematical model about falling ladder, which has the background in physics and usually be found in calculus teaching, and gives a solution by means of the Mathematica.

Keywords:Calculus; Mathematica; Mathematical Model