

含有负斜率直线可逆循环的温度 - 熵图*

刘雨龙

(盐城工学院 基础部, 江苏 盐城 224003)

摘 要: 在含有负斜率直线的可逆循环中, 热的迁移方向不能从 $P - V$ 图上直接看出来。用 $T - S$ 关系对其进行讨论, 画出 $T - S$ 图, 根据熵的变化, 可以直接知道热的迁移情况。

关键词: 负斜率直线; 可逆循环; 理想气体; 温度; 熵; 内能

中图分类号: O414.11

文献标识码: A

文章编号: 1671 - 532X(2004)04 - 0016 - 03

对循环的分析是工程热力学入门课程的重要组成部分, 在循环概念教学中, 人们发明了 $P - V$ 图上的三角形循环。 $P - V$ 图上的三角形循环, 如果带有一个正斜率的直线路径, 热的迁移方向比较明显, 而带有一个负斜率直线路径的三角形循环, 如果不做出一些努力, 热的迁移方向就不能从 $P - V$ 图上直接看出来。处理这一类问题, 用 $T - S$ 图进行分析、讨论比较有效。

1 分析和讨论

让我们考虑图 1 所示的循环。对于工作物质是理想气体的该可逆循环, 根据理想气体方程 ($PV = RT$) 和热力学第一定律 ($dQ = dE + PdV$)

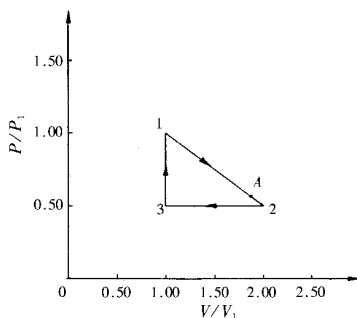


图 1 简单三角形循环的图

Fig. 1 simple triangle circulation picture

可以知道, 状态 2 到状态 3 过程, 压强不变, 体积减小, 外界对系统做功, 内能减少, 热排出系统; 状态 3 到状态 1 过程, 体积不变, 压强增大, 内能增

加, 热进入系统。而状态 1 到状态 2, 情况则较为复杂一些。该过程中, 温度在 $\frac{V}{V_1} = 1.50$ 时达到最大, 既有吸热、又有放热, 内能也在不断变化, 我们仍可以通过理想气体方程和热力学第一定律得出, 从状态 1 到状态 A 的过程中, 系统的内能增加大于系统对外界做功, 热进入系统; 点 A 处, 是一个吸、放热的转换点, 并且能计算出 $P_A = \frac{9}{16}P_1$, $V_A = 1.875V_1$, $T_A = 1.055T_1$; 从状态 A 到状态 2 的过程, 系统的内能减少, 小于系统对外界做功, 系统排出热。但本文讨论该循环的 $T - S$ 关系, 画出 $T - S$ 图, 根据熵变化, 确定热的迁移情况。

为找出 $T - S$ 关系, 从 TdS 方程入手, 即:

$$TdS = dE + PdV \quad (1)$$

方便起见, 我们考虑 1 mol 的单原子理想气体, 所需的理想气体方程:

$$PV = RT \quad \text{与} \quad dE = \frac{3}{2}RdT \quad (2)$$

图 1 所示的可逆循环, 由三角形三个顶点确定的三个终态。从状态 1 到状态 2 是膨胀过程, 压强线性减少, 可由下列公式描述:

$$\frac{P}{P_1} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \frac{V}{V_1} \quad (3)$$

使用理想气体方程: $PV = RT$ 和 (3) 式求得, 状态 1 到状态 2 过程的 $T - V$ 关系式为:

$$\frac{T}{T_1} = \frac{3}{2} \frac{V}{V_1} - \frac{1}{2} \left(\frac{V}{V_1} \right)^2 \quad (4)$$

* 收稿日期: 2004 - 09 - 17

作者简介: 刘雨龙 (1965 -) 男, 江苏盐城人, 盐城工学院讲师, 主要研究方向为物理理论与教学。

状态2到状态3过程的 $T-V$ 关系式为 $\frac{T}{T_1} = \frac{1}{2} \frac{V}{V_1}$; 状态3到状态1的过程中: $V = V_1$ 。因而, 我们可以得到, 反映状态 $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$ 循环过程的 $T-V$ 关系如图2所示。

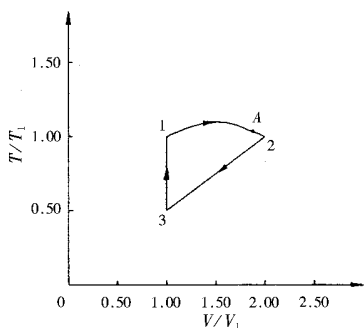


图2 简单三角形循环的图

Fig.2 simple triangle circulation picture

为讨论状态1和状态2之间的熵的变化, 根据 TdS 方程(1)式和理想气体方程(2)式

$$dS = \frac{3}{2} R \frac{dT}{T} + R \frac{dV}{V} \quad (5)$$

将方程沿着从状态1向状态2的路径积分, 得到:

$$S - S_1 = \frac{3}{2} R \ln \frac{T}{T_1} + R \ln \frac{V}{V_1} \quad (6)$$

再看方程(4)式, 它是一个二次方程, 其解为:

$$\frac{V}{V_1} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - 2 \frac{T}{T_1}} \quad (7)$$

(7)式中, 如果 $T = T_1$, 那么 $\frac{V}{V_1} = 1$ 或者 2, 如果 $T = \frac{9}{8} T_1$, 那么 $\frac{V}{V_1} = \frac{3}{2}$, 于是将这个结果写为:

$$\frac{V}{V_1} = \frac{3}{2} - \sqrt{\frac{9}{4} - 2 \frac{T}{T_1}}, \quad V_1 \leq V \leq \frac{3}{2} V_1 \quad (8)$$

$$\frac{V}{V_1} = \frac{3}{2} + \sqrt{\frac{9}{4} - 2 \frac{T}{T_1}}, \quad \frac{3}{2} V_1 < V \leq V_2 \quad (9)$$

从而(6)式可写成:

$$S - S_1 = \frac{3}{2} R \ln \left[\frac{3}{2} \frac{V}{V_1} - \frac{1}{2} \left(\frac{V}{V_1} \right)^2 \right] + R \ln \frac{V}{V_1} \quad (10)$$

或

$$S - S_1 = \frac{3}{2} R \ln \frac{T}{T_1} + R \ln \left(\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - 2 \frac{T}{T_1}} \right) \quad (11)$$

万方数据

上述(11)式就是欲求的状态1到状态2过程的 $T-S$ 关系。

再讨论从状态2到状态3的过程中熵的变化, 对于该过程: 压强不变、体积减少,

$$P = \frac{1}{2} P_1 = \text{常量} \quad (12)$$

使用理想气体方程, 求出:

$$\frac{T}{T_1} = \frac{1}{2} \frac{V}{V_1} \quad (13)$$

根据 TdS 方程, 且 $T_2 = T_1$, $V_2 = 2V_1$, 可以得到:

$$S - S_2 = \frac{3}{2} R \ln \frac{T}{T_2} + R \ln \frac{V}{V_2}$$

或

$$S - S_2 = \frac{3}{2} R \ln \frac{T}{T_2} + R \ln \frac{V}{V_1} - R \ln 2 \quad (14)$$

利用(13)式, 得出从状态2到状态3过程的 $T-S$ 关系式为:

$$S - S_2 = \frac{3}{2} R \ln \frac{T}{T_2} + R \ln \frac{2T}{T_1} - R \ln 2 \quad (15)$$

最后讨论状态3到状态1的过程中熵的变化, 该过程中: 体积不变, 压强增大,

$$V = V_1 = \text{常量} \quad (16)$$

根据理想气体方程, 可求出:

$$\frac{T}{T_1} = \frac{P}{P_1} \quad (17)$$

同样由 TdS 方程, 且 $T_3 = \frac{1}{2} T_1$, 得到:

$$S - S_2 = \frac{3}{2} R \ln \frac{T}{T_3} = \frac{3}{2} R \ln \frac{2T}{T_1} \quad (18)$$

为了画出图, 我们再次整理方程(11)(15)(18)式, 两边除以 R , 表示状态1到状态2过程的(11)式就写成:

$$\frac{S - S_1}{R} = \frac{3}{2} \ln \frac{T}{T_1} + \ln \left(\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - 2 \frac{T}{T_1}} \right) \quad (19)$$

这里的负号对应于 $V_1 \leq V \leq \frac{3}{2} V_1$ 的状态, 正号对应于 $\frac{3}{2} V_1 < V \leq V_2$ 的状态。在(19)式中, 当 $T_2 = T_1$ 时(式中取正号),

$$\frac{S - S_1}{R} = \ln 2 \quad (20)$$

因而, 可以将表示从状态2到状态3的过程的(15)式化简写成:

$$\frac{S - S_1}{R} = \frac{5}{2} \ln \frac{T}{T_1} + \ln 2 \quad (21)$$

上式中,当 $T_3 = \frac{1}{2} T_1$ 时,

$$\frac{S_3 - S_1}{R} = -\frac{3}{2} \ln 2 \quad (22)$$

同样,可以将表示从状态 3 到状态 1 过程的(18)式化简写成:

$$\frac{S - S_1}{R} = \frac{3}{2} \ln \frac{T}{T_1} \quad (23)$$

方程(19)(21)和(23)式分别表示由(3)(12)和(16)式描述的图 1 上三个过程的 $T-S$ 关系式,这些关系反映在图 3 的 $T-S$ 图上。

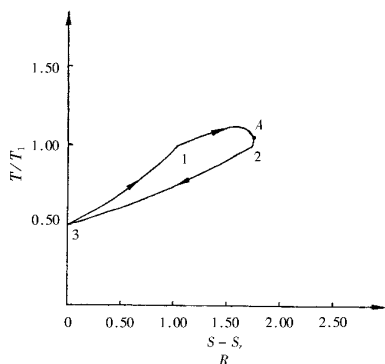


图 3 对应于三角形可逆循环的图

Fig.3 corresponding triangle anti-circular picture

其中 $\frac{T}{T_1}$ 、 $\frac{S - S_r}{R}$ 、 $S_r = S_1 - \frac{3}{2} R \ln 2$, 从 $1 \rightarrow A \rightarrow 2$ 过程的数据,是从状态 1 到状态 2 的过程中,不断变化 $\frac{V}{V_1}$,代入(4)式,求出相应的 $\frac{T}{T_1}$ 值,代入(10)式,

求出相应的 $\frac{S - S_1}{R}$ 后,再利用 $S_r = S_1 - \frac{3}{2} R \ln 2$ 来

计算 $\frac{S - S_r}{R}$ 的, $\frac{S - S_r}{R} = \frac{S - S_1 - (S_r - S_1)}{R} =$

$\frac{S - S_1}{R} + \frac{3}{2} \ln 2$ 状态 $1 \rightarrow A \rightarrow$ 状态 2 过程中:

$$\frac{S - S_r}{R} = \frac{3}{2} \ln \frac{T}{T_1} + \ln \left(\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - 2 \frac{T}{T_1}} \right) + \frac{3}{2} \ln 2 \quad (24)$$

状态 2 到状态 3 过程中:

$$\frac{S - S_r}{R} = \frac{5}{2} \ln \frac{T}{T_1} + \frac{5}{2} \ln 2 \quad (25)$$

状态 3 到状态 1 过程中:

$$\frac{S - S_r}{R} = \frac{3}{2} \ln \frac{T}{T_1} + \frac{3}{2} \ln 2 \quad (26)$$

我们编制了计算机程序来完成该代数运算,求解以上(24)(25)(26)各方程式,获得图 3 中绘图数据。

2 总结

根据上述讨论,从状态 1 到状态 A,熵单调增加,从而热进入系统;从状态 A 到状态 2,熵单调减少,从而热迁移出系统。点 A 处,温度相对于熵的曲线斜率无穷大,为该循环熵的极值点。该点 $\frac{S_A - S_r}{R} = 1.748$ 。从状态 2 到状态 3,系统的熵单调减少,从而系统排出热,从状态 3 到状态 1,熵单调增加,从而热进入系统。 $T-S$ 关系图能更直观地说明可逆循环过程中热的迁移情况。

参考文献:

- [1] 程守洙,江之永.普通物理学[M].北京:高等教育出版社,1998.
- [2] 张三慧.大学物理学[M].北京:清华大学出版社,2000.

The Anti-circular Temperature and Quotient Picture of a Straight Line with a Negative Slope

LIU Yu-long

(Department of Basic Science of Yancheng Institute of Technology, Jiangsu Yancheng 224003, China)

Abstract In the anti-circulating of a straight line with a negative slope, the moving direction of heat is not obvious from the picture. The essay aims to discuss it by means of relationship, draw out the picture, and thus get the movement of heat directly.

Keywords a straight line with a negative slope; anti-circular; ideal gas; temperature; quotient; internal energy

万方数据