

弹塑性力学问题的广义有限元法*

张振宇, 董兴平

(河海大学 土木工程学院, 江苏 南京 210098)

摘要: 应用流形方法思想, 对传统有限元方法进行改进, 推导了弹塑性平面问题的广义有限元法的理论和数值计算列式。计算结果论证了使用广义有限元法求解弹塑性平面问题的可行性和有效性。

关键词: 有限元; 弹塑性问题; 广义有限元

中图分类号: TB125

文献标识码: A

文章编号: 1671-532X(2004)04-0019-03

自从 20 世纪 60 年代有限单元法问世以来, 随着现代计算机科学的发展, 为了分析、模拟材料和工程结构的特征, 相继建立了许多数值方法和计算方法, 如边界元法、数值流行方法、界面元法等。在现有的数值方法中, 传统有限元理论成熟, 原理简明, 已被工程界普遍接受。目前, 为了提高有限元法解的精度, 也提出了相应的措施。按逼近真实解的途径, 常规改进方法有: h 型有限元法、p 型有限元法、hp 型有限元法。

石根华^[1]提出的数值流形方法中将节点作为物理覆盖, 通过提高定义在覆盖上的局部逼近函数的阶数, 从而提高流形方法总体求解的精度。梁国平^[2]吸收了流形方法的有限覆盖思想, 提出了广义有限元的概念, 并从数学上论证了广义有限元方法的可行性。由于广义有限元的自由度全部定义在节点上, 因此容易被传统的有限元程序接受, 并且由于其协调性总能保证, 故不同节点的多项式的阶次可以按照问题的需要任意选取。文献^[3]采用同一思想, 建立了广义有限元的数值实施列式。文献^[4]对平面问题的广义有限元进行理论推导和程序实施。本文在上述作者工作的基础上, 推导了平面弹塑性问题中的广义有限元理论及数值实施列式, 论证了广义有限元在求解弹塑性问题的可行性与有效性。

1 广义有限元的概念

1.1 单元位移模式及插值函数

设 S_n 为传统有限元空间, 插值基函数取为 $\{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n\}$, 则以传统有限元法所表达的位移函数近似解为:

$$U^h = \sum_{i=1}^N u_i \phi_i \quad (1)$$

其中, $u_i (i = 1, 2, \dots, N)$ 为节点位移。

构造新的逼近空间, 采用分片任意高阶多项式甚至级数展开式作为逼近空间。将传统有限元的节点自由度广义化, 认为各节点可有任意多个广义自由度, 即将式(1)中传统位移向量 u_i 进一步表示为多个广义自由度的函数。对于位移元而言, 节点的广义自由度即为节点的广义位移。例如:

$$u_i = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix} = \sum_{j=1}^{m_i} \begin{Bmatrix} f_{ij}(x, y) \\ 0f_{ij}(x, y) \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} d_{i, 2j-1} \\ d_{i, 2j} \end{Bmatrix} \quad (2)$$

将(2)代入(1), 从而得到新的一类有限元近似解表达式

$$U^h = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{m_i} \begin{Bmatrix} f_{ij}(x, y) \\ 0f_{ij}(x, y) \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} d_{i, 2j-1} \\ d_{i, 2j} \end{Bmatrix} \phi_i = \sum_{i=1}^N F^i \phi_i D^i = \sum_{i=1}^N N^i D^i \quad (3)$$

式中 D^i 为节点 i 的广义位移向量, $D^i = [d_{i, 1}, d_{i, 2}, \dots, d_{i, 2m_i}]^T$ 。

由于在新的插值函数 N^i 中包含有传统有限

* 收稿日期: 2004-06-21

作者简介: 张振宇(1978-), 男, 辽宁凌源市人, 河海大学硕士研究生, 主要研究方向为非线性数值计算研究。

元中的插值函数 ϕ_i ,因此广义有限元的协调性自然得到保证。由此构造出的有限元插值方法称为广义有限元法。这种具有多个广义位移的节点称为“广义节点”。当取 $m_i = 1$ 及 $f_{ij}(x, y) = 1$ 时,这种广义有限元方法便退化为传统有限元方法。

在广义有限元法中,一个广义节点上的广义位移的数目是与人们所期望的单元插值函数的阶数有关的,可任意取定。

1.2 几何矩阵

$$\epsilon = LU_e = LN_e D_e = [N_e^1 \quad N_e^2 \quad \dots \quad N_e^q] D_e = [B_e^1 \quad B_e^2 \quad \dots \quad B_e^q] D_e \quad (4)$$

式中, $L = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}$, L 为平面问题的小变形微分算子, B_e 为广义有限元的单元几何矩阵。

微分算子 B_e 为广义有限元的单元几何矩阵。

1.3 单元刚度矩阵

现用 C 表示弹性矩阵。在得到插值函数和几何矩阵后,就可建立弹性力学边值问题中能量泛函表达式的离散形式,进而通过变分原理得到系统的总体支配方程。

$$K_e u = F \quad (5)$$

其中, $K_e = \int_A B_e^T C B_e t dx dy \quad (6)$

K_e 表示广义单元刚度矩阵。其中分块子阵 K_{ij} ,其阶数与所采用的广义插值函数的阶次有关。对于平面四节点等参单元,当节点具有一阶广义插值函数时, K_{ij} 是一个 6×6 阶的矩阵,而当节点具有二阶广义插值函数时, K_{ij} 则是一个 24×24 阶的矩阵。

2 塑性材料的增量本构关系

材料进入塑性后,应变增量 $d\epsilon_{ij}$ 可分成弹性应变增量 $d\epsilon_{ij}^e$ 和塑性应变增量 $d\epsilon_{ij}^p$ 。而弹性应变增量 $d\epsilon_{ij}^e$ 与应力增量 $d\sigma_{ij}$ 之间满足 Hooke 定律

$$d\epsilon_{ij}^e = \frac{d\sigma_{ij}}{2G} + \frac{3\mu}{E} \cdot d\sigma \delta_{ij} \quad (7)$$

对于理想塑性材料,其塑性应变增量则满足

$$d\epsilon_{ij}^p = d\lambda \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} \quad (8)$$

式中, $g = g(\sigma)$ 是塑性势函数, $d\lambda$ 为非负的比例系数。如果塑性势函数为屈服函数或加载函数,即 $g = f$,则上式成为 $d\epsilon_{ij}^p = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}$,此时称之为相

关联的流动法则。其中加载函数为总应力 σ_{ij} 、总塑性应变 ϵ_{ij}^p 和硬化参数 k 的函数。

增量理论的弹塑性应力 - 应变关系式如下

$$d\sigma_{ij} = (C - C_p) d\epsilon_{ij} \quad (9)$$

其中

$$C_p = \frac{C \frac{\partial f}{\partial \sigma} \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma} \right)^T C}{A + \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma} \right)^T C \frac{\partial f}{\partial \sigma}} \quad (10)$$

式中, $A = -\frac{1}{d\lambda} \frac{\partial f}{\partial k} dk$, k 为强化参数。对于理想塑性材料,无强化现象, k 为常数, $A = 0$ 。材料进入强化阶段的 A 需由单向试验得出的有关曲线求得。适当选取材料的加载函数,便可由(10)式求得塑性矩阵。

对于应力尚处于弹性阶段的单元,其刚度矩阵为

$$K^e = \int_A B_e^T C B_e t dA \quad (11)$$

而对于已进入塑性区域的单元,单元刚度矩阵为

$$K^{ep} = \int_A B_e^T C_{ep} B_e t dA \quad (12)$$

式中,弹塑性刚度矩阵 $C_{ep} = C - C_p$ 。

把所有单元的刚度矩阵组集成结构的整体刚度矩阵 K ,并求解平衡方程

$$K \Delta u_1 = \Delta F_1 \quad (13)$$

3 程序实施说明

在程序实施中,由于广义有限元与传统有限元一样,自由度均定义在单元节点上,因此弹塑性广义有限元程序研制与传统弹塑性有限元方法类似,可直接在传统有限元程序基础上进行修改。就平面四节点等参单元而言,由于广义有限元较传统有限元的阶次至少高一次,计算单元刚度矩阵时,宜用 9 个高斯积分点进行计算。

由于广义有限元中节点的位移为广义位移,这些广义位移不一定都具有各自的物理意义,故在求得节点的广义位移后,再按节点的位移插值函数求得具有实际物理意义的节点位移。同时应力也要作类似的处理。

4 算例分析

算例 1 图 1 所示的一端受集中力作用的悬臂梁, $L = 8 \text{ m}$, $h = 1 \text{ m}$,取单位厚度 $t = 1 \text{ m}$,受集中力 $P = 1 \text{ N}$, $E = 105 \text{ Pa}$, $\mu = 0.25$, $\sigma_s = 25 \text{ Pa}$,采

用线性强化模型, 并服从 Mises 屈服条件, 硬化参数 $H' = 0.2$ 。用广义有限元法计算时, 布置 $5 \times (11 \times 5)$ 个规则节点, 单元数为 10×4 , 单元内高斯点数为 3×3 个。

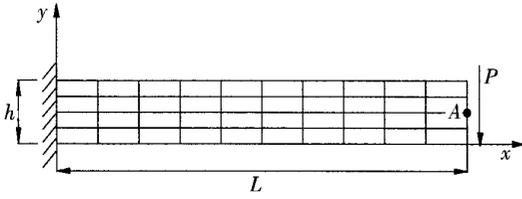


图 1 悬臂梁一端受集中力的作用
Fig.1 Cantilever beam subjected to a concentrated force at the free end

Von.Mises 屈服准则进行计算。计算结果与理论解进行比较可知, 环向应力 σ_θ 沿径向分布的情况, 与理论解^[5]相当接近(图 3)。

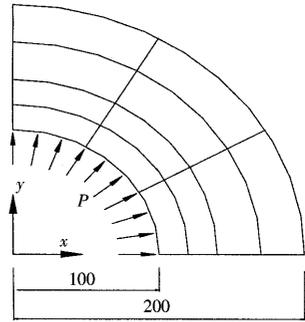


图 2 厚壁圆筒及计算网格
Fig.2 thick-walled cylinder

表 1 一端受集中力作用的悬臂梁竖向位移

Table1 Vertical displacements of cantilever beam subjected to a Concentrated force at the free end

坐标 (m)	mm			
	弹性解	弹塑性解		
		弹性有限元解答	本文方法解答	ANSYS 解答
(1.6 0.5)	1.092	1.126	1.948	2.020
(3.2 0.5)	4.057	4.133	6.735	6.837
(4.8 0.5)	8.426	8.544	13.09	13.227
(6.4 0.5)	13.731	13.891	20.429	20.600
(8.0 0.5)	19.505	19.703	28.264	28.461

从上表中可以看出, 本文解与 ANSYS 的解很接近, 已经能够满足实际工程的需要。另外, 对于二阶或更高阶的广义有限元法, 会得到更高精度的解。

算例 2 图 2 所示的厚壁圆筒受内压 $P = 80$ MPa 的作用。假定为平面应变情况, 圆筒的弹性模量 $E = 2.1 \times 10^5$ MPa, 泊松比为 $\nu = 0.3$, 单轴屈服应力 $\sigma_s = 240$ MPa, 应变硬化参数 $H' = 0$ 。采用

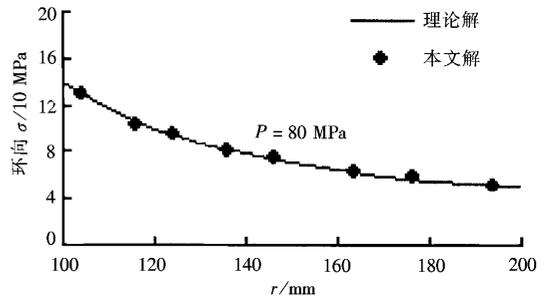


图 3 内压力作用下的环向应力

Fig.3 LOOP-direction stress under inner pressure and computed mesh

5 结论

广义有限元方法是近几年出现的一种数值计算方法, 其求解过程与传统有限元法相似。本文讨论了如何使用广义有限元法来求解弹塑性问题。从算例结果可以看出, 广义有限元方法不仅可以用来求解弹性问题, 而且对平面弹塑性问题的求解也是可行的, 也可以满足工程精度的需要。

参考文献:

[1] 石根华. 数值流形方法与非连续变形方法[M]. 裴觉民译. 北京: 清华大学出版社, 1997.
 [2] 梁国平, 何江衡. 广义有限元方法[J]. 力学进展, 1995, 25(4): 562-565.
 [3] 田荣. 连续与非连续变形分析的有限覆盖无单元方法及其应用研究[D]. 大连: 大连理工大学, 2000.
 [4] 邵国建. 广义有限元及其应用[J]. 河海大学学报, 2002, 30(4): 28-31.
 [5] Hodge P G, White G N. A quantitative comparison of flow and deformation theories of plasticity[J]. Appl. Mech, 1950, 17: 180-184.

(下转第 33 页)

参考文献：

- [1] 刘根洪 , 何仁杰 . 微分几何和计算几何 [M]. 成都 : 四川林学出版社 , 2000 .
 [2] 关履泰 , 罗笑南等 . 计算机辅助几何图形设计 [M]. 北京 : 高等教育出版社 , 1999 .
 [3] 陈建春 . 矢量图形系统开发和编程 [M]. 北京 : 电子工业出版社 , 2004 .
 [4] 施法中 . 计算机辅助几何设计与非均匀有理 B 样条 [M]. 北京 : 北京航空航天大学出版社 , 1989 .
 [5] 李友辉 . Visual C + + .NET. 图形图像编程 [M]. 北京 : 北京电子工业出版社 , 2001 .

Arithmetic and Method of Dynamically Drawing Random Order Bezier Curve

WANG Fu - yuan^{1 2} , XU Jia - wen¹ , WANG Qi²

- (1. College of Mechanical & Electrical Engineering , Nanjing University of Aeronautics and Astronautics , Jiangsu Nanjing 210016 , China ;
 2. College of Mechanical Engineering , Yangcheng Institute of Technology , Jiangsu Yangcheng 224003 , China)

Abstract : In this paper , the method and arithmetic , how to dynamically draw random order Bezier curves by VC + + programming technology in graph system , are introduced . And these curves drew by this way have characters of snapping , modifying , adding control points . Similarly , B - spline and three order parameter curves can be drawn in same way . Consequently , the drawing method extends the application of these curves for engineering .

Keywords : Bezier curve ; dynamically drawing ; high order ; VC + +

(上接第 21 页)

Generalized Finite Element Mrthod For Elasto - Plastic Problem

ZHANG Zhen - yu , ZHANG Qing , DONG Xing - ping

(College of Civil Engineering , Hohai University , Jiangsu Nanjing 210098 , China)

Abstract : In this paper , the authors propose the generalized finite element method by applying the concept of manifold method to the modification of the conventional FEM , advance the fundamental theory for elasto - plastic problem and illustrate the effectiveness of this method by numerical examples .

Keywords : Finite Element Method ; elasto - plastic problem ; generalized finite element method