

# 小波变换在图像处理中的应用\*

王吉林

(盐城工学院 电气系,江苏 盐城 224003)

摘要:介绍了基于小波变换的图像分解与重构,在此基础上讨论了 MATLAB 语言环境下图像压缩、图像特征提取和图像融合的基本方法。实验结果表明:基于小波变换的图像处理具有理想的效果。

关键词:小波变换;图像压缩;特征提取;图像融合

中图分类号:TP751 文献标识码:A 文章编号:1671-532X(2004)04-0050-05

小波变换在近十几年来得到迅速的发展,是被广泛应用于图像处理、语言分析和数据压缩等众多领域的一种数学工具,是继 19 世纪 Fourier 变换之后在数学领域里的一个重大突破,对现代应用技术的发展产生了深远影响。

一般来说,小波变换在图像处理中主要应用在以下几个方面:图像的分析、图像压缩、图像特征提取、图像融合等。

## 1 小波变换

### 1.1 分析小波

设  $\Psi \in L^2 \cap L^1$ , 且  $a \in R - \{0\}, b \in R$ , 则按如下方式生成的函数族  $\{\Psi_{a,b}(t)\}$ :

$$\Psi_{a,b}(t) = |a|^{-\frac{1}{2}} \Psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \quad (1)$$

称为分析小波或连续小波。 $\Psi(t)$  称为基本小波或母小波(Mother Wavelet)。其中  $a$  是尺度参数, $b$  是时移参数。改变  $a$  的值,对函数  $\Psi_{a,b}(t)$  具有伸展和收缩的作用,即  $|a| > 1$  时  $\Psi_{a,b}(t)$  伸展,反之  $|a| < 1$  时  $\Psi_{a,b}(t)$  收缩。改变  $b$  的值,对函数  $\Psi_{a,b}(t)$  具有平移的作用。小波  $\Psi(t)$  的选择既不是惟一的,也不是任意的。这里  $\Psi(t)$  是归一化的具有单位能量的解析函数,它应满足如下两个条件:

(1) 定义域应是紧支撑的(Compact Support),即在一个很小的区间之外,函数为零,也就是函数

应有速降特性。

(2) 平均值为零。

上面两个条件可概括为,小波应是一个具有振荡性和迅速衰减的波。

### 1.2 连续小波变换(CWT)

设函数  $f(t)$  具有有限能量,即  $f(t) \in L^2(R)$  则小波变换的定义如下:

$$W(a,b) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \frac{1}{\sqrt{|a|}} \Psi\left(\frac{t-b}{a}\right) dt \quad (2)$$

上式中  $f(t)$  对应于目标信号, $\Psi_{a,b}(t)$  代表具有变焦功能照相机的镜头, $b$  相当于是镜头相对于目标平行移动, $a$  的作用相当于镜头的变焦环,当  $a$  较大时,目标远推视野变宽而分析频率降低,可以做平滑部分的观察,当  $a$  较小时,目标拉近视野变窄而分析频率提高,可以对细节进行观察。

### 1.3 离散小波变换(DWT)

在连续小波变换中,由于伸缩参数和平移参数连续取值不利于计算机处理,因此连续小波变换主要用于理论分析,在实际应用中离散小波变换更适用于计算机处理。离散小波的定义可由下式表示:

$$\Psi_{m,n}(t) = \frac{1}{\sqrt{a_0^m}} \Psi\left(\frac{t - nb_0 a_0^m}{a_0^m}\right) = a_0^{-\frac{m}{2}} \Psi(a_0^{-m} t - nb_0) \quad (3)$$

\* 收稿日期:2004-09-22

作者简介:王吉林(1966-),男,江苏盐都人,盐城工学院电气系教师,硕士,主要研究方向为信号与信息处理。

其中 ,一般选取 : $m, n$  为整数 , $a_0 > 1, b_0 > 0$ 。相  
对应的离散小波变换可由下式定义 :

$$f, \Psi_{m, n} = a_0^{-\frac{m}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \Psi(a_0^{-m} t - nb_0) dt \quad (4)$$

为了便于计算机处理 ,对平移时间也进行离  
散化处理 ,且保证小波函数生成的小波为标准正  
交基 ,选择  $a_0 = 2, b_0 = 1$  则式 (4) 变为二进离散小  
波变换 :

$$f, \Psi_{m, n} = 2_0^{-\frac{m}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \Psi(2^{-m} t - n) dt \quad (5)$$

把式 (5) 简称为小波变换。进一步推广可以

得到二维小波变换。

### 1.4 Mallat 算法

Mallat 算法可以快速实现数字图像经过二维  
小波变换的分解与重构过程。如一幅二维离散图  
像  $\{c(m, n)\}$  ,二维小波变换可以将它分解为各  
层各个分辨率上的近似分量  $cA_j$  ,水平方向细节分  
量  $cH_j$  ,垂直方向细节分量  $cV_j$  ,和对角线方向细  
节分量  $cD_j$ 。其二层小波图像分解过程见图 1。

其二层小波图像重构过程正好与此相反 ,如  
图 2 所示 :

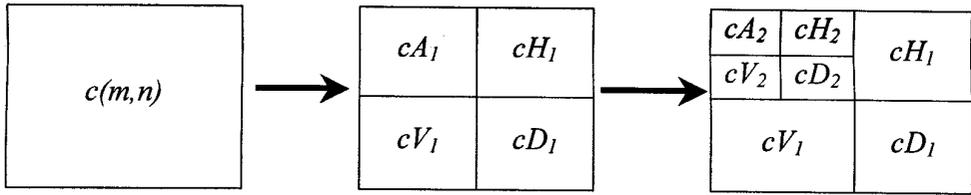


图 1 小波图像分解过程

Fig.1 Wavelet image decomposition

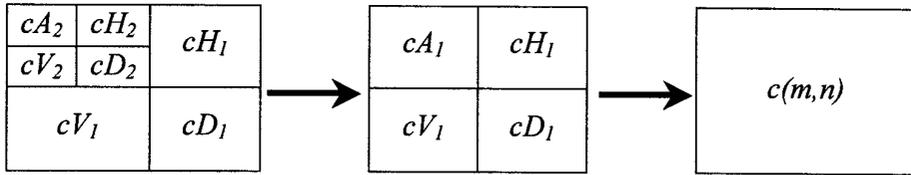


图 2 小波图像重构过程

Fig.2 Wavelet image reconstruction

基于小波变换的图像处理 ,是通过对图像分  
解过程中所产生的近似分量与细节分量系数的调  
整 ,使重构图像满足特定条件 ,从而实现对图像  
的处理。

## 2 MATLAB 与小波变换图像处理的实现

MTALAB 小波分析工具箱集成了小波分析的  
许多研究成果 ,不仅提供了丰富的工具函数 ,还  
是一个很好的算法研究、工程设计与仿真应用平台 ,  
特别适合于图像分析、去噪、压缩、融合等的研究。

### 2.1 图像压缩

一般图像数据间存在着各种数据信息的冗  
余 ,而数据冗余不利于图像信息的网上实时快速  
传输和大量存储 ,图像压缩可解决这个问题。小  
波变换用于图像压缩具有压缩比大、压缩速率快

和压缩后保持图像特征基本不变等特点 ,因此小  
波变换被广泛用于图像压缩。小波变换图像压缩  
方法有变换压缩与相邻像素去相关压缩之分。

#### 2.1.1 利用变换压缩实现图像压缩

变换压缩方法在图像压缩中起着重要的作  
用。其基本原理是将图像信号做域的变换 ,通过  
变换图像的主要能量大都集中在少数的变换系数  
上 ,对少数的变换系数进行量化编码就可以实现  
对图像压缩。

小波变换的图像压缩 ,首先选择适当的小波  
基 ,然后按照图 1 所示方式对图像进行分解 ,由于  
分解后图像的主要能量集中于近似分量  $cA_j$  ,再对  
近似分量  $cA_j$  进行编码就可以得到不同压缩比例  
图像。其实验结果如图 3 所示。

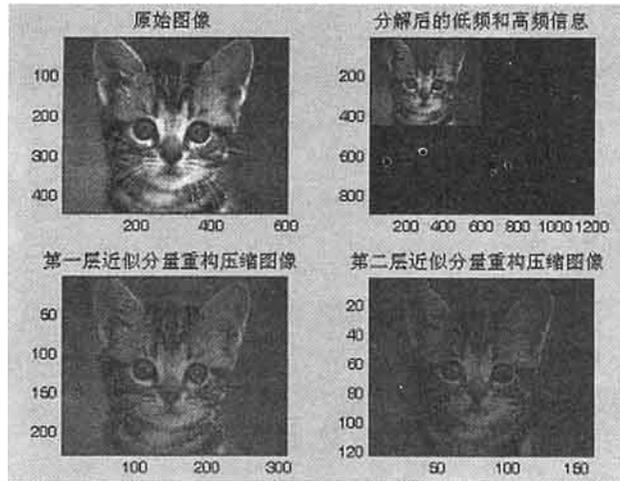


图 3 利用变换压缩实现图像压缩

Fig.3 Image compression using transform compression

由图像 3 中可以看出,通过小波变换使图像数据出现了较大压缩,但图像质量并未出现明显下降。

原始图像与不同压缩比例图像的数据对比如表 1 所示:

表 1 图像“cat”不同压缩比例下数据对比  
 Table1 the data contrasts of the image “cat” at different compression rates.

状 态	尺寸	大小/字节
压缩前图像	512 × 512	2 097 152 double array
第一层压缩图像	256 × 256	524 288 double array
第二层压缩图像	128 × 128	131 072 double array

### 2.1.2 利用小波包分析实现图像压缩

在图像数据中,往往相邻像素之间的灰度值是高度相关的,因此可以采用小波包分析去除相

邻像素间的相关性,从实现图像数据的压缩。小波包分解和小波分解的不同在于小波包分解不仅对图像信号的低频部分进行分解,而且也高频部分进行分解。根据给定的熵标准计算出最佳分解树,使图像信号按最佳分解树进行小波分解,对除低频部分外的每个小波包系数,选择一个阈值对其进行阈值处理,实现图像数据压缩。

在 MATLAB 的小波工具箱中,提供了一个函数 `wpdencmp`,该函数的功能是以图像信号最佳小波包分解实现图像数据压缩处理。其算法流程为:①原始图像;②多层小波分解;③阈值处理;④多层小波重构;⑤重构图像。

图 4 所示的是其实验结果对比,小波分解系数中置 0 的系数个数百分比:91.573 0%,压缩后图像剩余能量百分比:99.790 6%。通过观察压缩后图像质量并未出现变化。

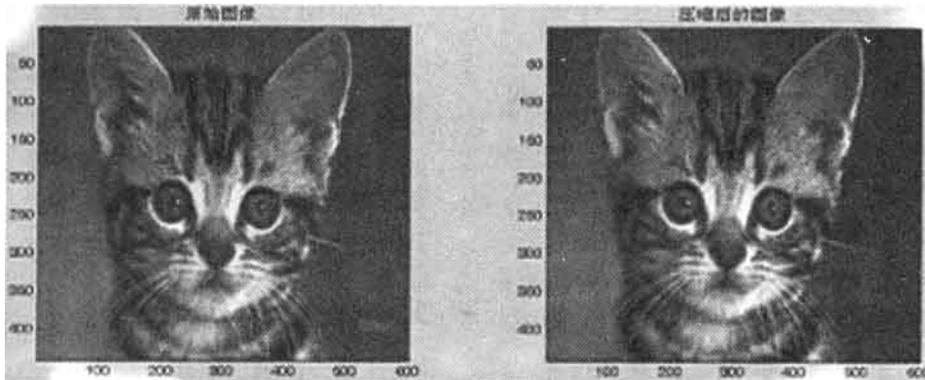


图 4 预置阈值图像压缩

Fig.4 Image compression processing

### 2.2 数字字符图像特征提取

利用 2.1.1 中讨论的变换压缩方法实现图像特征提取。对数字字符图像进行三级小波分解。图 5 中所示的图像包含有原图像、一级分解、二级分解和三级分解图像,其中三级分解图像表示一幅图像被分解为三层,共有 10 个小波变换子图像,各层之间相互独立,分别对应于不同的频率和分辨率,每一层都包含水平、垂直和对角线三个高频子图像,低分辨率层还包含一个低分辨率的原始子图像。这些字符图像构成了一种塔形结构。

通过小波系数分析,计算每个子图像能量与每个子图像中小波系数的最大值和最小值。

设子图像为  $X(i, j)$ ,其中  $(i = 0, 1, 2, \dots, M-1, j = 0, 1, 2, \dots, N-1)$ ,  $M, N$  分别为子图像的宽与高,则子图像能量为:

$$e = \frac{1}{M \times N} \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{N-1} |x(i, j)|^2 \quad (6)$$

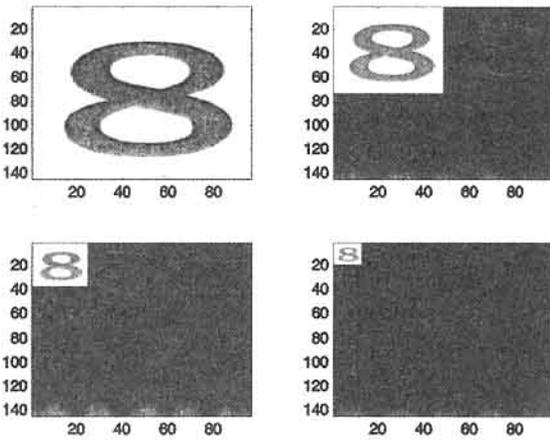


图 5 字符 8 图像的原始和一级、二级、三级分解图像

Fig.5 the original image of Sign 8 and its decomposed images of Grades I, II and III

表 2 为小波系数与能量分布统计结果。

第一层(高频子带)小波系数绝大部分的绝对值非常小,接近于零,与表 2 中所示第一层能量分布相吻合。频率越高现象越明显。第二、三层小波系数逐层递增,第三层小波系数明显比第一层增大,层数越大小波系数越重要。可见,分辨率低时小波系数的绝对值最大。

表中,近似子图比细节子图的系数及能量大,水平和垂直方向细节子图比对角线方向子图的系数及能量大。图像的主要能量集中在低频子带。

表 2 字符图像小波系数统计表

Table2 the statistics of the wavelet coefficients on the image of the sign

图号	最大值	最小值	能量	层能量
cH <sub>1</sub>	63.541 8	- 61.993 8	0.000 072	
cV <sub>1</sub>	79.486 4	- 70.620 6	0.000 099	0.000 2
cD <sub>1</sub>	38.337 7	- 38.239 6	0.000 032	
cH <sub>2</sub>	72.593 8	- 83.826 8	0.000 6	
cV <sub>2</sub>	79.427 9	- 75.619 4	0.000 6	0.001 4
cD <sub>2</sub>	48.989 3	- 48.633 0	0.000 2	
cH <sub>3</sub>	74.464 0	- 74.137 1	0.003 2	
cV <sub>3</sub>	66.369 8	- 76.522 3	0.003 7	0.998 4
cD <sub>3</sub>	46.160 2	- 48.480 9	0.001 6	
cA <sub>3</sub>	298.739 2	47.302 2	0.989 9	

由上述分析可知,低频子带具有原图的绝大部分能量及特征,并且空间维数比原图大大降低,所以,低频子带图像可以被认定为原图像的特征图像。使用小波变换也可以实现图像特征提取。

### 2.3 图像融合

一般的图像融合是指将同一对象的两幅或更多幅的图像合成到一幅图像中,以使他比原来任何一幅图像都更容易被人们理解。这种技术多被用于医学影像和遥感图像处理。

图像数据是由图像像素的亮度值构成的,对图像数据进行二维离散小波变换,经多分辨率分解后生成小波系数矩阵,然后对两幅图像小波系数矩阵进行数据融合处理,最后,由融合小波系数矩阵进行图像重构,生成融合图像。

本文中实验采用了两幅不同内容图像进行图像融合技术研究,可以便于观察图像融合的效果,其实验结果如图 6 所示。

图像 1 和图像 2 为原始图像。

图像 3 是融合图像,重构前的图像小波系数矩阵是由图像 1 的近似分量系数和图像 2 细节分量系数组成。

图像 4 是融合图像,重构前的图像小波系数矩阵是由图像 1 的近似分量系数、水平方向与垂直方向细节分量系数和图像 2 对角线方向细节分量系数组成。

图像 5 是融合图像,重构前的图像小波系数矩阵是由图像 1 的近似分量系数、水平方向与对角线方向细节分量系数和图像 2 垂直方向细节分量系数组成。

图像 6 是融合图像,重构前的图像小波系数

矩阵是由图像 1 的近似分量系数、垂直方向与对角线方向细节分量系数和图像 2 水平方向细节分量系数组成。

图像 7 所示的是图像 2 水平方向细节分量构成的图像。

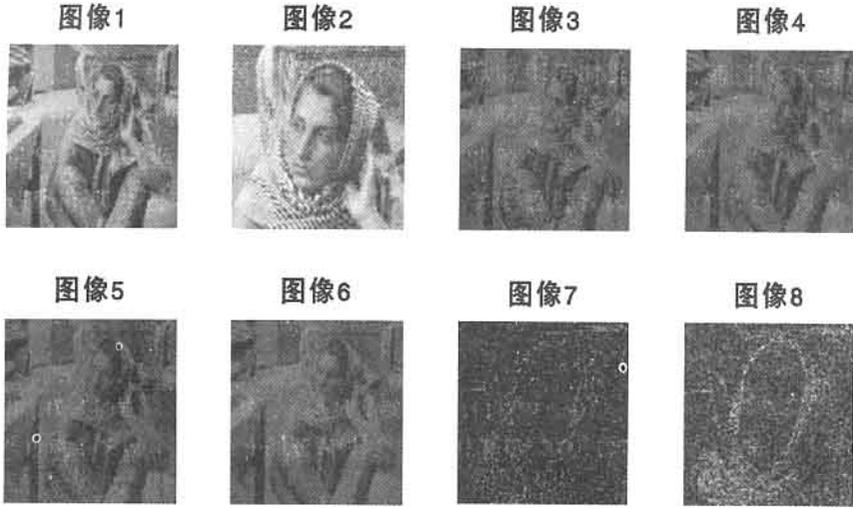


图 6 图像融合处理

Fig.6 Image fusion processing

图像 8 所示是从图像 6 中提取的水平方向细节分量构成的图像。

进行了阐述,重点讨论了应用 MATLAB 语言中小波变换函数进行图像压缩、图像特征提取和图像融合的基本方法。实验结果表明:小波变换在图像处理中具有理想的效果和很高的工程价值。

从图像 6、7、8 所示的内容看这种图像融合技术可以用于图像数字水印嵌入技术研究。

### 3 结束语

简要的就小波变换理论与 MATLAB 语言特点

#### 参考文献:

- [1] 伯晓晨,李涛,刘路. Matlab 工具箱应用指南[M]. 北京:电子工业出版社,2000.
- [2] 秦前清,杨宗凯.实用小波分析[M]. 西安:西安电子科技大学出版社,1994.
- [3] 林宏裔.基于 K-L 变换的汽车车牌照识别及其相关的图像处理研究[D].南京:东南大学,2004.
- [4] 郁晓红,姚敏.小波变换及在图像处理中小波系数分析[J].计算机应用,2001(2):37-39.

## The Application of Wavelet Transformation in Image Processing

WANG Ji-lin

(College of Electronic and Information Engineering, Yancheng Institute of Technology, Jiangsu Yancheng 224003, China)

**Abstract:** This paper introduces image decomposition and reconstruction by way of wavelet transformation technique, discusses the essential ways of image compression, image feature extraction and image fusion being chained to MATLAB platform and sets an experimental example to illustrate its ideal effect.

**Keywords:** wavelet transform; image compression; feature extraction; image fusion