具 Holling Ⅱ型响应函数捕食模型的稳态解*

田灿荣
(盐城工学院 基础部,江苏 盐城 224003)

摘 要:研究了一类非线性反应扩散系统,该系统描述了具 Holling Ⅱ型响应函数的捕食模型,首先利用正性引理和上下解方法给出了问题解的全局存在性和唯一性,接着给出了常微系统和偏微系统稳定性的结果,最后用这些结果给出了所讨论问题的全局稳定性,并在生物意义上给出解释。

关键词:响应函数;上下解;全局稳定
中图分类号:O175.26　　**文献标识码**:A　　**文章编号**:1671-5322(2005)01-0013-06

对于下列自治的 Lotka-Volterra 系统,

$$\begin{cases} \dfrac{du_1}{dt} = u_1(1 - k_1 u_1 - k_2 u_1^2) - \dfrac{u_2 u_1}{1 + a u_1} \\ \dfrac{du_2}{dt} = u_2(-\delta_0 - \delta_1 u_2) + \dfrac{r u_2 u_1}{1 + a u_1} \end{cases} \tag{0.1}$$

王育全等人在文献[1]中讨论了平衡点的全局稳定性和极限环。其中 u_1, u_2 分别代表食饵与捕食者的种群密度,$\varphi(u_1) \triangleq 1 - k_1 u_1 - k_2 u_1^2$ 为控制食饵的增长率,$f(u_1) \triangleq \dfrac{u_1}{1 + a u_1}$ 表明食饵转化成捕食者能量的转化率为具 Holling Ⅱ型的响应函数[2-4],$\varphi(u_2) \triangleq -\delta_0 - \delta_1 u_2$ 反映了捕食者的内部竞争和死亡率。$k_1, k_2, a, \delta_0, \delta_1, r$ 均为正常数。

文献[1]研究的是常微模型,只考虑了时间对种群密度的影响,而没有考虑空间位置对种群密度的影响。实际在生态圈中,某个区域内种群自身具有迁移的本能。比如说为了寻求充足的食物,种群由密度高的区域向密度低的区域扩散;为了躲避天敌的侵袭,种群向天敌密度低的区域扩散。对此文献[5]有详细的论述,本文在构造模型时引入扩散项,考虑下列反应扩散系统

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_1}{\partial t} - d_1 \triangle u_1 = u_1(1 - k_1 u_1 - k_2 u_1^2) - \dfrac{u_2 u_1}{1 + a u_1}, & \Omega \times (0, \infty), \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial t} - d_2 \triangle u_2 = u_2(-\delta_0 - \delta_1 u_2) + \dfrac{r u_2 u_1}{1 + a u_1}, & \Omega \times (0, \infty), \\ \dfrac{\partial u_1}{\partial n} = \dfrac{\partial u_2}{\partial n} = 0, & \partial\Omega \times (0, \infty), \\ u_1(x, 0) = \eta_1(x) & \Omega, \\ u_2(x, 0) = \eta_2(x) & \Omega。 \end{cases} \tag{0.2}$$

其中,Ω 是 R^N 中的有界区域,边界 $\partial\Omega$ 光滑,n 是单位外法向量,d_1, d_2 为扩散系数,根据生物学意义,我们设 $\eta_i(x) \geq 0 (i = 1, 2)$。

本文主要讨论(1.2)全局解的存在性、唯一性和解的渐近行为。全文安排如下:第 2 节给出正性引理和全局解的存在唯一性;第 3,4 节考虑解的渐近行为。

* 收稿日期:2004-12-16
作者简介:田灿荣(1980-),男,江苏泰州人,盐城工学院助教,硕士,研究方向:偏微分方程。

1 全局解的存在唯一性

本节我们首先给出正性引理，然后得到(1.2)解的存在唯一性。

引理 1.1 设 $u_i \in C(\bar{\Omega}\times[0,T])\cap C^{2,1}(\Omega\times(0,T])(i=1,2)$，且满足

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u_i}{\partial t}-d_i\triangle u_i\geqslant\sum\limits_{j-1}^{2}b_{ij}u_j(x,t), & \Omega\times(0,T],\\ \dfrac{\partial u_i(x,t)}{\partial n}\geqslant 0, & \partial\Omega\times(0,T],\\ u_i(x,0)\geqslant 0, & \bar{\Omega}\end{cases}\tag{1.1}$$

其中 $b_{ij}\in C(\bar{\Omega}\times[0,T])$。如果当 $j\neq i$ 时 $b_{ij}\geqslant 0$ 成立，那么在 $\bar{\Omega}\times[0,T]$ 内 $u_i(x,t)\geqslant 0$，而且在 $\bar{\Omega}\times(0,T]$ 内 $u_i>0$ 或者 $u_i\equiv 0$。此引理称为正性引理[6]，作为其推论，我们得到下列引理。

引理 1.2 系统(1.2)的任一解非负。

下面建立(1.2)解的存在性和唯一性，首先引入下列定义：

定义 2.1 如果 $\hat{u}_i,\tilde{u}_i\in C(\bar{\Omega}\times[0,T])\cap C^{2,1}(\Omega\times(0,T])$，在 $\bar{\Omega}\times[0,T]$ 内，$0\leqslant\hat{u}_i\leqslant\tilde{u}_i$。而且满足下列条件(1.2)，则称非负函数 $(\tilde{u}_1,\tilde{u}_2)(\hat{u}_1,\hat{u}_2)$ 为(0.2)的耦合上下解。

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\tilde{u}_1}{\partial t}-d_1\triangle\tilde{u}_1\geqslant\tilde{u}_1(1-k_1\tilde{u}_1-k_2\tilde{u}_1{}^2)-\dfrac{\hat{u}_2\tilde{u}_1}{1+a\tilde{u}_1}, & \Omega\times(0,T],\\ \dfrac{\partial\tilde{u}_2}{\partial t}-d_2\triangle\tilde{u}_2\geqslant\tilde{u}_2(-\delta_0-\delta_1\tilde{u}_2)+\dfrac{r\tilde{u}_2\tilde{u}_1}{1+a\tilde{u}_1}, & \Omega\times(0,T],\\ \dfrac{\partial\hat{u}_1}{\partial t}-d_1\triangle\hat{u}_1\leqslant\hat{u}_1(1-k_1\hat{u}_1-k_2\hat{u}_1{}^2)-\dfrac{\tilde{u}_2\hat{u}_1}{1+a\hat{u}_1}, & \Omega\times(0,T],\\ \dfrac{\partial\hat{u}_2}{\partial t}-d_2\triangle\hat{u}_2\leqslant\hat{u}_2(-\delta_0-\delta_1\hat{u}_2)+\dfrac{r\hat{u}_2\hat{u}_1}{1+a\hat{u}_1}, & \Omega\times(0,T],\\ \dfrac{\partial\hat{u}_i}{\partial n}\leqslant 0\leqslant\dfrac{\partial\tilde{u}_i}{\partial n},i=1,2. & \partial\Omega\times(0,T],\\ \hat{u}_i(x,0)\leqslant\eta_i(x)\leqslant\tilde{u}_i(x,0),i=1,2. & \Omega\end{cases}\tag{1.2}$$

定义 1.2 如果对任意的 $(\eta_1,\eta_2)\in S$，(0.2)相应的解 (u_1,u_2) 当 $x\in\bar{\Omega}$，$t>0$ 时仍然在 S 中，则集合 S 称为系统(0.2)的不变三角。当 $u_i>0(i=1,2)$ 时，集合 S 称为正不变三角。

引理 1.3 设 $(\tilde{u}_1,\tilde{u}_2)$ 与 $(\hat{u}_1,\hat{u}_2)$ 是(1.2)的一对非负耦合上下解，则系统(1.2)存在唯一全局解 (u_1^*,u_2^*)，而且解满足 $\hat{u}_i(x,t)\leqslant u_i^*(x,t)\leqslant\tilde{u}_i(x,t)(i=1,2)$。

证明 既然 $(\tilde{u}_1,\tilde{u}_2)$ 与 $\hat{u}_1,\hat{u}_2$ 为(0.2)在 $\Omega\times(0,\infty)$ 内的一对耦合上下解，而且(0.2)的反应项在 Λ 内满足 Lipchitz 条件，其中

$$\Lambda=\{(u_1,u_2);(x,t)\in\bar{\Omega}\times[0,\infty),\hat{u}_i(x,t)\leqslant u_i\leqslant\tilde{u}_i(x,t)(i=1,2)\}$$

由[7]的定理 1.1 知系统在 Λ 内存在唯一解，而且

$$u_i(x,t)\in C(\bar{\Omega}\times[0,\infty))\cap C^{2,1}(\Omega\times(0,\infty)),u_i(x,t)\in\Lambda$$

如果耦合上下解与 x,t 无关，即 $\tilde{u}_i(x,t)=\tilde{c}_i$，$\hat{u}_i(x,t)=\hat{c}_i$，(1.2)中的不等式成为

$$\begin{cases}\tilde{c}_1(1-k_1\tilde{c}_1-k_2\tilde{c}_1{}^2)-\dfrac{\hat{c}_2\tilde{c}_1}{1+a\tilde{c}_1}\leqslant 0\leqslant\hat{c}_1(1-k_1\hat{c}_1-k_2\hat{c}_1{}^2)-\dfrac{\tilde{c}_2\hat{c}_1}{1+a\hat{c}_1}\\ \tilde{c}_2(-\delta_0-\delta_1\tilde{c}_2)+\dfrac{r\tilde{c}_2\tilde{c}_1}{1+a\tilde{c}_1}\leqslant 0\leqslant\hat{c}_2(-\delta_0-\delta_1\hat{c}_2)+\dfrac{r\hat{c}_2\hat{c}_1}{1+a\hat{c}_1}\end{cases}\tag{1.3}$$

作为引理 1.3 的推论，我们得到下列结果。

引理 1.4 设 $\tilde{c}$ 和 $\hat{c}$ 是一对非负常向量，且 $\tilde{c}\geqslant\hat{c}$ 满足(1.3)，则当在 Ω 内 $\hat{c}_i\leqslant\eta_i(x)\leqslant\tilde{c}_i$ 对 $i=1,2$ 成立时，系统(0.2)存在唯一全局解 (u_1^*,u_2^*)，在 $\bar{\Omega}\times[0,\infty)$ 内，$\hat{c}_i\leqslant u_i^*(x,t)\leqslant\tilde{c}_i$。

引理 1.4 表明集合 $\langle\hat{c},\tilde{c}\rangle\equiv\{(u_1,u_2);(x,t)\in\bar{\Omega}\times[0,\infty),\hat{c}_i\leqslant u_i(x,t)\leqslant\tilde{c}_i(i=1,2)\}$

是系统(0.2)的一个不变三角。引理 2.1 说明如果初始函数非负,这个三角还是正不变三角。

定理 1.1 对于任何非负初值函数,系统(0.2)存在唯一全局解(u_1^*,u_2^*),使得在 $\bar{\Omega}\times[0,\infty)$内,$0\leqslant u_i^*(x,t)\leqslant\tilde{c}_i$。其中 $\tilde{c}_i=\max\{\sup_{x\in\bar{\Omega}}\eta_i(x),M_i\}$,$M_1=\dfrac{\sqrt{k_1^2+4k_2}-k_1}{2k_2}$,$M_2=\dfrac{1}{\delta_1}\left(\dfrac{rM_1}{1+aM_1}-\delta_0\right)$。

证明易知如果取 $\tilde{c}_i=0$ 和 $\tilde{c}_i=\max\{\sup x\in\bar{\Omega}\eta_i(x),M_i\}$,则对于 $i=1,2$ 有 $\tilde{c}\geqslant\hat{c}$ 且(1.3)成立。因此 $\tilde{c}$ 与 $\hat{c}$ 是一对耦合的常数上下解,由引理 1.4 立即得到存在唯一性结果。

注 1.1 此时 M_1 为 $\varphi(u_1)=0$ 的唯一正常数解。

2 解的渐近行为的预备知识

引理 2.1 对于下列自治的偏微系统(2.1)及常微系统(2.2)(2.3)

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}-\mathrm{d}\Delta u=f(u), & \Omega\times(t_0,\infty)\\ \dfrac{\partial u}{\partial t}=0, & \partial\Omega\times(t_0,\infty)\\ u\mid_{t=t_0}(x,t)=u(x,t_0), & \Omega\end{cases}\tag{2.1}$$

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}t}=f(\upsilon)\\ \upsilon(t_0)=\sup\bar{\Omega}u(x,t_0)\end{cases}\tag{2.2}$$

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=f(\omega)\\ \omega(t_0)=\inf\bar{\Omega}u(x,t_0)\end{cases}\tag{2.3}$$

如果$\lim_{t\to\infty}\upsilon(t)=\lim_{t\to\infty}\omega(t)=a$,$a$ 为常数,那么: $\lim\limits_{t\to\infty}u(x,t)=a(x\in\bar{\Omega})$

定理 2.1 对于系统(0.2),当时间 t 趋向于无穷时,在 $\bar{\Omega}$ 内,下列成立。

$$\lim_{t\to\infty}\sup u_1(x,t)\leqslant M_1,\lim_{t\to\infty}\sup u_2(x,t)\leqslant\max\{1,M_2\}$$

我们研究(0.2)解的渐近行为与它相应常数稳态解(c_1,c_2)之间的关系,即它满足

$$\begin{cases}c_1(1-k_1c_1-k_2c_1^2)-\dfrac{c_2c_1}{1+ac_1}=0\\ c_2(-\delta_0-\delta_1c_2)+\dfrac{rc_2c_1}{1+ac_1}=0\end{cases}\tag{2.4}$$

把(2.4)看作椭圆系统,我们定义 $\tilde{c}=(\tilde{c}_1,\tilde{c}_2)$与 $\hat{c}=(\hat{c}_1,\hat{c}_2)$为(2.4)的一对耦合上下解如果 $\tilde{c}\geqslant\hat{c}(0,0)$,

而且 $$\begin{cases}\tilde{c}_1(1-k_1\tilde{c}_1-k_2\tilde{c}_1^2)-\dfrac{\hat{c}_2\tilde{c}_1}{1+a\tilde{c}_1}\leqslant0\leqslant\hat{c}_1(1-k_1\hat{c}_1-k_2\hat{c}_1^2)-\dfrac{\tilde{c}_2\hat{c}_1}{1+a\hat{c}_1}\leqslant0\\ \tilde{c}_2(-\delta_0-\delta_1\tilde{c}_2)+\dfrac{r\tilde{c}_2\tilde{c}_1}{1+a\tilde{c}_1}\leqslant0\leqslant\hat{c}_2(-\delta_0-\delta_1\hat{c}_2)+\dfrac{r\hat{c}_2\hat{c}_1}{1+a\hat{c}_1}\end{cases}\tag{2.5}$$

当 $\hat{c}_i\leqslant\eta_i(x)\leqslant\tilde{c}_i$ 在 Ω 内对 $i=1,2$ 成立时,(2.4)的耦合上下解也是(0.2)的耦合上下解。

注意到当 $\hat{c}_i\leqslant u_i,\upsilon_i\leqslant\tilde{c}_i$ 时,Lipchitz 条件成立。

$$\left|\left[u_1(1-k_1u_1-k_2u_1^2)-\frac{u_2u_1}{1+au_1}\right]-\left[\upsilon_1(1-k_1\upsilon_1-k_2\upsilon_1^2)-\frac{\upsilon_2\upsilon_1}{1+a\upsilon_1}\right]\right|\leqslant K(\mid u_1-\upsilon_1\mid+\mid u_2-\upsilon_2\mid)\tag{2.6}$$

$$\left|\left[u_2(-\delta_0-\delta_1u_2)+\frac{ru_2u_1}{1+au_1}\right]-\left[\upsilon_2(-\delta_0-\delta_1\upsilon_2)+\frac{r\upsilon_2\upsilon_1}{1+a\upsilon_1}\right]\right|\leqslant -K(\mid u_1-\upsilon_1\mid+\mid u_2-\upsilon_2\mid)\tag{2.7}$$

其中 $K=K(k_1,k_2,a,\delta_0,\delta_1,r)$,由下列递推过程构造两序列 $\{\bar{c}^{(m)}\}\equiv\{\bar{c}_1^{(m)},\bar{c}_2^{(m)}\}$ 和 $\{\underline{c}^{(m)}\}\equiv\{\underline{c}_1^{(m)},\underline{c}_2^{(m)}\}$

$$\begin{cases} \bar{c}_1^{(m)} = \bar{c}_1^{(m-1)} + \dfrac{1}{K}\left[\bar{c}_1^{(m-1)}\left(1 - k_1\bar{c}_1^{(m-1)} - k_2\,\bar{c}_1^{(m-1)2}\right) - \dfrac{\underline{c}_2^{(m-1)}\,\bar{c}_1^{(m-1)}}{1 + a\bar{c}_1^{(m-1)}}\right] \\ \bar{c}_2^{(m)} = \bar{c}_2^{(m-1)} + \dfrac{1}{K}\left[\bar{c}_2^{(m-1)}\left(-\delta_0 - \delta_1\bar{c}_1^{(m-1)2}\right) + \dfrac{r\bar{c}_2^{(m-1)}\,\bar{c}_1^{(m-1)}}{1 + a\bar{c}_1^{(m-1)}}\right] \\ \underline{c}_1^{(m)} = \underline{c}_1^{(m-1)} + \dfrac{1}{K}\left[\underline{c}_1^{(m-1)}\left(1 - k_1\underline{c}_1^{(m-1)} - k_2\,\underline{c}_1^{(m-1)2}\right) - \dfrac{\underline{c}_2^{(m-1)}\,\underline{c}_1^{(m-1)}}{1 + a\underline{c}_1^{(m-1)}}\right] \\ \underline{c}_2^{(m)} = \underline{c}_2^{(m-1)} + \dfrac{1}{K}\left[\underline{c}_2^{(m-1)}\left(-\delta_0 - \delta_1\underline{c}_2^{(m-1)}\right) + \dfrac{r\bar{c}_2^{(m-1)}\,\underline{c}_1^{(m-1)}}{1 + a\underline{c}_1^{(m-1)}}\right] \end{cases} \tag{2.8}$$

其初始值为 $\bar{c}^{(0)} = \tilde{c}$ 和 $\underline{c}^{(0)} = \hat{u}$,而 K 是(2.6)(2.7)中的常数,易证序列 $\{\bar{c}^{(m)}\}$, $\{\underline{c}^{(m)}\}$ 具有单调性。

$$\hat{c} \leqslant \underline{c}^{(m)} \leqslant \underline{c}^{(m+1)} \leqslant \bar{c}^{(m+1)} \leqslant \bar{c}^{(m)} \leqslant \tilde{c}, m = 1,2,\cdots$$

且极限存在,不妨记

$$\bar{c} = \lim_{m\to\infty}\bar{c}^{(m)}, \underline{c} = \lim_{m\to\infty}\underline{c}^{(m)} \tag{2.9}$$

我们于是得到下列关系

$$\begin{cases} \bar{c}_1\left(1 - k_1\bar{c}_1 - k_2\bar{c}_1^{\,2}\right) - \dfrac{\underline{c}_2\bar{c}_1}{1 + a\bar{c}_1} = 0 = \underline{c}_1\left(1 - k_1\underline{c}_1 - k_2\underline{c}_1^{\,2}\right) - \dfrac{\bar{c}_2\underline{c}_1}{1 + a\underline{c}_1} \\ \bar{c}_2\left(-\delta_0 - \delta_1\bar{c}_2\right) + \dfrac{r\bar{c}_2\bar{c}_1}{1 + a\bar{c}_1} = 0 = \underline{c}_2\left(-\delta_0 - \delta_1\underline{c}_2\right) + \dfrac{r\underline{c}_2\underline{c}_1}{1 + a\underline{c}_1} \end{cases} \tag{2.10}$$

常向量 $\bar{c}$ 与 $\underline{c}$ 称为(2.4)在 $\langle\hat{c},\tilde{c}\rangle$ 的拟解,一般地说,常向量 $\bar{c}$ 和 $\underline{c}$ 不是(2.4)的解,然而当 $\bar{c} = \underline{c}$ 时,$\bar{c}$(或 $\underline{c}$)是(2.4)在 $\langle\hat{c},\tilde{c}\rangle$ 内的唯一解,现在我们给出(0.2)的解和(2.4)的关系。

定理 2.2　(定理 1.1 和定理 1.2)[7] 设 $\tilde{c}$,$\hat{c}$ 是(2.4)或(0.2)的一对耦合上下解,$\bar{c}$,$\underline{c}$ 分别为(2.9)的极限,即是(2.4)的拟解且满足(2.10),那么对满足 $\hat{c}_i \leqslant \eta_i(x) \leqslant \tilde{c}_i$ 在 Ω 内的任何初始函数,(0.2)的解 $U = (u_1, u_2)$ 具有性质

$$\underline{c} \leqslant \liminf_{t\to\infty} u(x,t) \leqslant \limsup_{t\to\infty} u(x,t) \leqslant \bar{c}\,(x \in \bar{\Omega})$$

而且如果 $\bar{c} = \underline{c}$,则 $\bar{c}$(或 $\underline{c}$)是(2.4)在 $\langle\hat{c},\tilde{c}\rangle$ 内的唯一解且

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t) = \bar{c}\,(x \in \bar{\Omega})$$

3　解的渐近行为

我们先考虑系统(0.2)半正常数稳态解$\left(\dfrac{\sqrt{k_1^{\,2} + 4k_2} - k_1}{2k_2}, 0\right)$的全局渐近稳定性,然后再考虑(0.2)正常数稳态解(c_1^*,c_2^*)的全局渐近稳定性。

定理 3.1　如果系统(0.2)的系数满足 $-\delta_0 + \dfrac{r\sqrt{k_1^{\,2} + 4k_2} - k_1}{2k_2 + a\left(\sqrt{k_1^{\,2} + 4k_2} - k_1\right)} < 0$ 即 $M_2 < 0$ 时,那么系统(0.2)存在唯一全局解($u_1(x,t)$,$u_2(x,t)$)在 $\bar{\Omega}$ 上一致收敛于$\dfrac{\sqrt{k_1^{\,2} + 4k_2} - k_1}{2k_2}$,0),也就是说系统(0.2)在($M_1$,0)点全局渐近稳定。

证明先应用定理 2.1,我们得到 $\limsup_{t\to\infty} u_1(x,t) \leqslant M_1$,即取 $\varepsilon_1 = \dfrac{(1 + aM_1)\delta_0 - rM_1}{2r}$,$\exists\, t_1 > 0$,当 $t \geqslant t_1$ 时,$0 \leqslant u_1(x,t) \leqslant M_1 + \varepsilon_1$ 在 $\bar{\Omega}$ 上一致成立。考虑(0.2)的第二个方程

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} - d_2\triangle u_2 = u_2\left(-\delta_0 - \delta_1 u_2\right) + \frac{ru_2u_1}{1 + au_1} \leqslant u_2\left(-\delta_0 - \delta_1 u_2 + \frac{r(M_1 + \varepsilon_1)}{1 + a(M_1 + \varepsilon_1)}\right) \leqslant -\delta_1 u_2^{\,2} \tag{3.1}$$

对于常微系统

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}t} = -\delta_1\upsilon^2 \\ \upsilon(t)\,|_{t=t_1} \geqslant 0 \end{cases} \tag{3.2}$$

显然 $\lim_{t\to\infty} v(t)=0$。根据引理 2.1 及比较原理,$0\leqslant\limsup_{t\to\infty} u_2(x,t)\leqslant 0(x\in\bar{\Omega})$,即 $\lim_{t\to\infty} u_2(x,t)=0$。因此 $\forall\varepsilon_2>0,\exists t_2>0$,当 $t\geqslant t_2$ 时,$0\leqslant u_1(x,t)\leqslant M_1+\varepsilon_1$,$0\leqslant u_2(x,t)\leqslant\varepsilon_2$ 在 $\bar{\Omega}$ 上一致成立。又根据引理 1.1,当 $t=t_2$ 时,$u_1(x,t_2)>0$,于是 $\inf_{\Omega}u_1(x,t_2)>0$。

取 $(\tilde{c}_1,\tilde{c}_2)=(M_1+\varepsilon_1,\varepsilon_2)$,$(\hat{c}_1,\hat{c}_2)=(\delta,0)$。其中

$$\delta=\min\left\{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{k_1}+\frac{1}{\sqrt{k_2}}\right),\inf_{\Omega}u_2(x,t_2)\right\},\varepsilon_2=\min\left\{\varepsilon_1,\frac{1}{4}\right\}$$

易证 $(\tilde{c}_1,\tilde{c}_2)$ 与 $(\hat{c}_1,\hat{c}_2)$ 满足(2.5),而且是(0.2)在 $t\geqslant t_2$ 时的耦合上下解。由定理 2.2,存在拟解 $(\bar{c}_1,\bar{c}_2)$ 和 $(\underline{c}_1,\underline{c}_2)$ 使得(0.2)的唯一解 (u_1,u_2) 满足

$$0\leqslant\hat{c}_i\leqslant\underline{c}_1\leqslant ui(x,t)\leqslant(\bar{c}_i\leqslant\tilde{c}_i(t\to\infty,c\in\bar{\Omega})(i=1,2)$$

而且 $(\bar{c}_1,\bar{c}_2)$,$(\underline{c}_1,\underline{c}_2)$ 满足(2.10)。由 ε_1 的取法可知,$-\delta_0+\dfrac{r(M_1+\varepsilon_1)}{1+a(M_1+\varepsilon_1)}<0$,则 $-\delta_0-\delta_1\bar{c}_2+\dfrac{r\bar{c}_1}{1+a\bar{c}_1}<0$。由(2.10)的第 2 式得 $\bar{c}_2=0$,则 $\underline{c}_2=0$,从而 $\bar{c}_1=\underline{c}_1=M_1$,因此我们得到 $(\bar{c}_1,\bar{c}_2)=(\underline{c}_1,\underline{c}_2)=(M_1,0)$。应用定理 3.2,我们得到(0.2)的解 $(u_1(x,t),u_2(x,t))$ 当 $t\to\infty$ 时收敛于 $(M_1,0)$。

注 3.1 上述结论的生物学意义为,如果捕食者的死亡率很大,而且响应函数所控制的食物转化率很小,捕食者趋向于灭绝,食饵一致生存并且种群密度趋向于 M_1。

下面讨论(0.2)在 (c_1^*,c_2^*) 的全局稳定性,先在引理 3.1 中考虑(2.4)存在唯一正解的条件。

引理 3.1 如果系数满足 $-\delta_0+\dfrac{r\sqrt{k_1^2+4k_2}-k_1}{2k_2+a(\sqrt{k_1^2+4k_2}-k_1)}>0$ 即 $M_2>0$,$a-k_1\leqslant 0$。那么系统(2.4)存在唯一正解 (c_1^*,c_2^*),而且 $\dfrac{\delta_0}{r-a\delta_0}<C_1^*<M_1$。

证明要使(2.4)存在正解,那么只要下列关系成立

$$\begin{cases}(1-k_1c_1-k_2c_1^2)-\dfrac{c_2}{1+ac_1}=0\\[2ex](-\delta_0-\delta_1c_2)+\dfrac{rc_1}{1+ac_1}=0\end{cases}\tag{3.3}$$

也就是说下列成立

$$\begin{cases}c_2=(1+ac_1)(1-k_1c_1-k_2c_1^2\\[1ex]c_2=\dfrac{1}{\delta_1}\left(-\delta_0+\dfrac{rc_1}{1+ac_1}\right)\end{cases}\tag{3.4}$$

讨论两条曲线 $l_1:p(x)=(1+ax)(1-k_1x-k_2x^2)$ $\qquad l_2:q(x)=\dfrac{1}{\delta_1}\left(-\delta_0+\dfrac{rx}{1+ax}\right)$

在 $x>0$ 时的情形,$p'(x)=-3ak_2x^2-2(k_2+ak_1)x+a-k_1\leqslant 0$,$q'(x)=\dfrac{r}{\delta_1(1+ax)^2}>0$,$p\left(\dfrac{\delta_0}{r-a\delta_0}\right)>0$,$q\left(\dfrac{\delta_0}{r-a\delta_0}\right)=0$,$p(M_1)=0$,$q(M_1)=M_2>0$。所以 l_1,l_2 在 $x>0$ 时存在唯一交点 (c_1^*,c_2^*),而且 $\dfrac{\delta_0}{r-a\delta_0}<c_1^*<M_1$。

定理 3.2 如果系统(0.2)的系数满足下列关系,δ_0 充分小,而且 $a-k_1\leqslant 0$,$m_2<1$,$\delta_1<r\leqslant a\delta_1(M_1+M_2)$,那么当 $t\to\infty$ 时,系统(1.2)的解 $(u_1(x,t),u_2(x,t))\to(c_1^*,c_2^*)$ 在 $\bar{\Omega}$ 中一致成立。

即 $\mathrm{limt}_{t\to\infty}(u_1(x,t),u_2(x,t))=(c_1^*,c_2^*)$ 其中 (c_1^*,c_2^*) 为(2.4)的唯一正解。

证明先应用定理 2.1,我们得到 $\limsup_{t\to\infty}u_1(x,t)\leqslant M_1$,$\limsup_{t\to\infty}u_2(x,t)\leqslant M_2$。也就是说 $\forall\varepsilon_1>0,\exists t_1>0$,当 $t\geqslant t_1$ 时,$0\leqslant u_1(x,t)\leqslant M_1+\varepsilon_1$,$0\leqslant u_2(x,t)\leqslant M_2+\varepsilon_1$ 在 $\bar{\Omega}$ 上一致成立。又根据引理 1.1,当 $t=t_1$ 时,$u_i(x,t)>0$,于是 $\inf_{\Omega}u_i(x,t_1)>0(i=1,2)$

下面我们考虑 $t\geqslant t_1$ 时的情形,如果 $(\tilde{c}_1,\tilde{c}_2)=(M_1+\varepsilon_1,M_2+\varepsilon_1)$ 与 $(\hat{c}_1,\hat{c}_2)=(\varepsilon_2,\varepsilon_2)$ 为(2.4)的耦合上下解,只需满足下列条件

$$\begin{cases} 1 - k_1(M_1+\varepsilon_1) - k_2(M_1+\varepsilon_1)^2 - \dfrac{\varepsilon_2}{1+a(M_1+\varepsilon_1)} \leqslant 0 \\ -\delta_0 - \delta_1(M_2+\varepsilon_1) + \dfrac{r(M_1+\varepsilon_1)}{1+a(M_1+\varepsilon_1)} \leqslant 0 \\ 1 - k_{1_2} - k_2(\varepsilon_2)^2 - \dfrac{M_2+\varepsilon_1}{1+a\varepsilon_2} \geqslant 0 \\ -\delta_0 - \delta_1\varepsilon_2 + \dfrac{r\varepsilon_2}{1+a\varepsilon_2} \geqslant 0 \end{cases} \tag{3.5}$$

此时取 $\varepsilon_1 = \min\left\{\frac{1-M_2}{2}, \inf \Omega u_1(x,t_1)\right\}$,$\varepsilon_2 = \min\left\{\frac{1-M_1}{4(k_1+k_2)}, 1\right\}$,$\delta_0 \leqslant (r-\delta_1)\varepsilon_2$。于是(3.5)恒成立。由定理 2.2 存在拟解$(\bar{c}_1,\bar{c}_2)$,$(\underline{c}_1,\underline{c}_2)$使得 $0<\underline{c}_1\leqslant\bar{c}_1\leqslant M_1$,$0<\underline{c}_2\leqslant\bar{c}_2\leqslant M_2$。而且

$$\begin{cases} \bar{c}_1(1-k_1\bar{c}_1-k_2\bar{c}_1{}^2) - \dfrac{\underline{c}_2\bar{c}_1}{1+a\bar{c}_1} = 0 = \underline{c}_1(1-k_1\underline{c}_1-k_2\underline{c}_1{}^2) - \dfrac{\bar{c}_2\underline{c}_1}{1+a\underline{c}_1} \\ \bar{c}_2(-\delta_0-\delta_1\bar{c}_2) + \dfrac{r\bar{c}_2\bar{c}_1}{1+a\bar{c}_1} = 0 = \underline{c}_2(-\delta_0-\delta_1\underline{c}_2) + \dfrac{r\underline{c}_2\underline{c}_1}{1+a\underline{c}_1} \end{cases} \tag{3.6}$$

由(3.6)第 1 式在$(0,M_1]\times(0,M_2]$内的单调性得,$\bar{c}_1=\underline{c}_1$,$\bar{c}_2=\underline{c}_2$。故应用定理 2.2,我们得到(0.2)的解$(u_1(x,t),u_2(x,t))$当 $t\to\infty$ 时收敛于(c_1^*,c_2^*)。

注 3.2　上述结论的生物学意义为,当捕食者的死亡率很小时,食饵与捕食者可能一致共存,而且捕食者与食饵的密度趋向稳定。

参考文献:

[1] Wang YuQuan,Jiang ZhuJun,Chen K y. Multiple Limit Cycles and Global Stability in Predator – Prey Model[J]. Acta Mathematicae Applicatac Sinica,1999,(15):206 – 219.

[2] Holling C S. The Functional Response of predator to prey Density and Its Role in Mining and Population Regulation[J]. Men. Cnt. Soc. Can,1963,(45):1 – 60

[3] Holling C S. Resilience and Stability of Ecosystems[J]. Ann. Rev. Ecol. Syst,1974,(4):1 – 24.

[4] Murdoch W W,Datel A. Predaddtion and Population Stanbility[J]. Adr. Ecol. Res,1975,(9):1 – 131.

[5] 林支桂. 三种群捕食 – 被捕食模型中具时滞的抛物系统[J]. 数学学报,2004,(47):559 – 568.

[6] Pao C V. Nonlinear Parabolic and Elliptic Equations[M]. New York:Plenum,1992,323 – 325.

[7] Pao C V. Convengence of solutions of reaction – diffusion systems with time delays[J]. Nonlinear Analysis,2002,(48):349 – 362.

Stable Solution of a Predator – Prey Model with Holling Ⅱ Functional Response

TIAN Can – rong

(Department of foundamental Sciences Teaching, Yancheng Institute of Technology,Jiangsu Yancheng　224003,China)

Abstract:This paper addresses a nonlinear reaction diffusion system, describing a predator – prey model with Holling Ⅱ type functional response. At first Postivity Lemma is used to prove the global existence and uniquiness of this pnablem. And then of the stabilitybetween ODE system and PDE system is set forth. Finally the reslut is demonstrated in the sense of Ecology.

Keywords:functional response;upper and lower solution;globally stable