

复合泊松模型破产概率的 Pollaczek—Khinchin 公式^{*}

杨善兵, 余志芳

(南京航空航天大学 理学院, 江苏 南京 210016)

摘 要: Pollaczek—Khinchin 公式是计算破产概率的重要公式之一。给出了复合 Poisson 风险模型破产 Pollaczek—Khinchin 公式的严格证明, 纠正了文献[1]中的证明错误。

关键词: 复合 Poisson 模型; 破产概率; Laplace 变换

中图分类号: O211.9 **文献标识码:** A **文章编号:** 1671—5322(2005)01—0020—03

破产概率的计算是古典风险理论中的一个重要的问题。保险公司希望破产概率尽可能的小, 最好为零, 但这是不实际的。在实际中, 找出破产概率的计算公式和与之相关的影响因素十分有意义。对此课题已经有众多结果^[2~3], Lundberg 给出了破产概率的上界估计式; Bowers 等人给出了破产概率的下界估计式等等。Pollaczek—Khinchin 提出了 P—K 公式, 为风险理论的研究树立了一个里程碑^[1], 但却给出了 P—K 公式的错误证明。

本文利用破产概率满足的微分—积分方程和拉普拉斯变换推导出破产概率的 P—K 公式, 弥补了文献[1]中的错误。

1 破产概率及模型建立

破产概率就是保险公司最终索赔额减去保费收入后超出了保险公司的初始准备金的概率。当保险公司的初始准备金 u 不足以支付最终索赔额超过保费收入的部分时, 理论上就称保险公司破产。

设保险公司的初始准备金为 u , 单位时间的保费收入为 β , 第 i 次索赔的索赔额为 U_i , 在 t 时刻保险公司的风险盈余 $\{R(t), t \geq 0\}$ 定义为: $R(t) = u + \beta t - \sum_{i=1}^{N(t)} U_i$, 其中 $N(t)$ 是时间 t 内发生的索赔次数, 本文设定 $N(t)$ 为参数 λ 的 Poisson 过程, λ 可以看成是单位时间内的索赔次数; 索赔额序列 $\{U_i\}_{i=1}^{\infty}$ 是独立同分布的随机变量, 其分布为 F_U , 所以 $\sum_{i=1}^{N(t)} U_i$ 是一个复合 Poisson 过程。 $R(t)$ 破产概率为 $\Psi(u)$

$$\Psi(u) = P\{R(t) = u + \beta t - \sum_{i=1}^{N(t)} U_i < 0, \text{对某个 } t\}.$$

2 破产概率的 P—K 公式

引理1 生存函数 $\Psi(u) = 1 - \Psi(u)$ 是定义在 R_+ 上的连续函数。

证明: 要证明命题, 只要证明 $\Psi(u)$ 是定义在 R_+ 上的连续函数即可。

$$\Psi(u) = P(R(t) < 0 \mid R(0) = u) = P(R(t) < 0, R(0) = u) \circ P^{-1}(R(0) = u)$$

由于 u 越大, 集合 $\{R(t) < 0, R(0) = u\}$ 越小, 故

$$0 \geq \Psi(u + \Delta u) - \Psi(u) = \frac{P(R(t) < 0, R(0) = u + \Delta u)}{P(R(0) = u + \Delta u)} - \frac{P(R(t) < 0, R(0) = u)}{P(R(0) = u)}$$

* 收稿日期: 2004—11—08

作者简介: 杨善兵(1974—), 男, 安徽寿县人, 盐城工学院助教, 南京航空航天大学硕士研究生。

$$= \frac{P(R(t) < 0, R(0) = u + \Delta u)P(R(0) = u) - P(R(t) < 0, R(0) = u)P(R(0) = u + \Delta u)}{P(R(0) = u + \Delta u)P(R(0) = u)}$$

其中, $P(R(0) = u) = 1$

因为 $R(t, u) = u + ct - \sum_{i=1}^{N(t)} U_i$ 是关于 u 连续的, 当 $\Delta u \rightarrow 0$ 时, 上式右边趋近于 0, 故 $\Psi(u)$ 在 R_+ 是连续的, 即 $\Psi(u)$ 在 R_+ 是连续的。

引理 2 设 $\Psi(u)$ 相应的左右导数分别为 $\Psi_-^{(1)}(u)$ 和 $\Psi_+^{(1)}(u)$, 则

$$\beta \Psi_+^{(1)}(u) = \lambda(\Psi(u) - \int_0^u \Psi(u-y) dF_U(y)) \quad (1.1)$$

$$\beta \Psi_-^{(1)}(u) = \lambda(\Psi(u) - \int_0^{u-} \Psi(u-y) dF_U(y)) \quad (1.2)$$

证明参见 [3]。

引理 3 破产函数 $\Psi(u)$ 满足下面的积分方程

$$\beta \Psi(u) = \lambda \int_u^{+\infty} \overline{F_U}(x) dx + \lambda \int_0^u \Psi(u-x) \overline{F_U}(x) dx \quad (1.3)$$

证明参见 [3]。

为了求解 (1.3) 式, 可以在两边同时取拉普拉斯变换, 求得 $L\Psi(s)$, 然后利用拉普拉斯变换的性质, 精确地求出拉普拉斯逆变换, 从而得到 P-K 公式。

定理对任意 $u \geq 0$, 有 $\Psi(u) = (1 - \frac{\lambda\mu}{\beta}) \sum_{k=1}^{+\infty} (\frac{\lambda\mu}{\beta})^k \overline{F_U^s}(u)$ 成立

其中, F_U^s 是 F_U 的积分尾分布, 定义为: $F_U^s = \frac{1}{\mu} \int_0^x \overline{F_U}(y) dy \quad x \geq 0, \mu = \int_0^\infty x dF_U(x)$

证明 由引理 3 结论可知 $\beta \Psi(u) = \lambda \int_u^{+\infty} \overline{F_U}(x) dx + \lambda \int_0^u \Psi(u-x) \overline{F_U}(x) dx \quad (1.3)$

对上式两边进行拉普拉斯变换: 左边 = $\beta \int_0^{+\infty} \Psi(u) e^{-su} du = \beta L\Psi(s)$

右边第一项 = $\lambda \int_0^{+\infty} \left[\int_u^{+\infty} \overline{F_U}(x) dx \right] e^{-su} du = \lambda \int_0^{+\infty} \left[\mu - \int_0^u \overline{F_U}(x) dx \right] e^{-su} du =$

$$\lambda \mu \int_0^{+\infty} e^{-su} du - \lambda \int_0^{+\infty} \left[\int_0^u \overline{F_U}(x) dx \right] e^{-su} du = \frac{\lambda \mu}{s} - \lambda \mu \int_0^{+\infty} F_U^s(u) e^{-su} du = \frac{\lambda \mu}{s} - \frac{\lambda}{s} L_{F_U^s}(s)$$

其中 $\int_0^{+\infty} F_U^s(u) e^{-su} du = \left(-\frac{1}{s} e^{-su} F_U^s(u) \right) \Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \left(-\frac{1}{s} e^{-su} \right) dF_U^s(u) = \frac{1}{s\mu} L_{F_U^s}(s)$

右边第二项 = $\lambda \int_0^{+\infty} \left[\int_0^u \Psi(u-x) \overline{F_U}(x) dx \right] e^{-su} du = \lambda \int_0^{+\infty} \left[\int_x^{+\infty} \Psi(u-x) e^{-su} du \right] \overline{F_U}(x) dx =$

$$\lambda \int_0^{+\infty} \left[\int_0^{+\infty} \Psi(z) e^{-sz} dz \right] \overline{F_U}(x) e^{-sx} dx = \lambda L\Psi(s) \int_0^{+\infty} \overline{F_U}(x) e^{-sx} dx = \lambda L\Psi(s) L_{F_U}(s)$$

故

$$\beta L\Psi(s) = \frac{\lambda \mu}{s} - \frac{\lambda}{s} L_{F_U^s}(s) + \lambda L\Psi(s) L_{F_U}(s)$$

$$L\Psi(s) = \frac{\lambda \mu - \lambda L_{F_U^s}(s)}{s(\beta - \lambda L_{F_U}(s))} = \frac{\lambda}{\beta s} \frac{\mu - L_{F_U^s}(s)}{1 - \frac{\lambda}{\beta} L_{F_U}(s)} = \frac{\lambda}{\beta s} (\mu - L_{F_U^s}(s)) \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{\lambda}{\beta} L_{F_U}(s) \right)^k =$$

$$\frac{\lambda \mu}{\beta s} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{\lambda}{\beta} L_{F_U}(s) \right)^k - \frac{1}{s} \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{\lambda}{\beta} L_{F_U}(s) \right)^k \quad (1.4)$$

下面, 考虑分布函数的卷积 $F_U^{s*}(u)$ 的拉普拉斯变换, $n = 1, 2, \Lambda$

其中, $F_U^{s*}(u) = \int_0^{+\infty} F_U^{s*(n-1)}(u-x) dF_U^s(x)$, 应用数学归纳法

$n = 1$ 时, $\int_0^{+\infty} F_U^s(u) e^{-su} du = L_{F_U^s}(s) = \frac{1}{s} \frac{1}{\mu} L_{F_U}(s)$

假定对 $n = k$ 成立, $\int_0^{+\infty} F_U^{s*k}(u) e^{-su} du = \frac{1}{s} \left(\frac{1}{\mu} L_{F_U}(s) \right)^k \quad (1.5)$

考虑 $n=k+1$ 的情形, 注意到当 $u < 0$ 时, $F_U^{s*k} \equiv 0$ 故

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} F_U^{s*(k+1)}(u) e^{-su} du &= \int_0^{+\infty} \left(\int_x^{+\infty} F_U^{s*k}(u-x) dF_U^s(x) \right) e^{-su} du = \\ \int_0^{+\infty} \int_x^{+\infty} F_U^{s*k}(u-x) \frac{1}{\mu} \overline{F_U}(x) e^{-su} du dx &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{\mu} \overline{F_U}(x) \int_0^{+\infty} F_U^{s*k}(u-x) e^{-su} du dx = \\ \int_0^{+\infty} \frac{1}{\mu} \overline{F_U}(x) \int_0^{+\infty} F_U^{s*k}(z) e^{-sz} e^{-sx} dz dx &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{\mu} \overline{F_U}(x) e^{-sx} dx \int_0^{+\infty} F_U^{s*k}(z) e^{-sz} dz = \frac{1}{s} \left(\frac{1}{\mu} L_{F_U}^-(s) \right)^{k+1} \end{aligned}$$

即对任意整数 n 有

$$\int_0^{+\infty} F_U^{s*n}(u) e^{-su} du = \frac{1}{s} \left(\frac{1}{\mu} L_{F_U}^-(s) \right)^n \quad n = 1, 2, \dots \quad (1.6)$$

$$\begin{aligned} (1.4) \text{ 右边} &= \frac{\lambda^\mu}{\beta s} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{\lambda^\mu}{\beta} \right)^k \left(\frac{1}{\mu} L_{F_U}^-(s) \right)^k - \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{\lambda^\mu}{\beta} \right)^k \left[\frac{1}{s} \left(\frac{1}{\mu} L_{F_U}^-(s) \right)^k \right] = \\ &= \frac{\lambda^\mu}{\beta} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{\lambda^\mu}{\beta} \right)^k \left[\frac{1}{s} \left(\frac{1}{\mu} L_{F_U}^-(s) \right)^k \right] - \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{\lambda^\mu}{\beta} \right)^k \left[\frac{1}{s} \left(\frac{1}{\mu} L_{F_U}^-(s) \right)^k \right] \end{aligned}$$

由(1.6)可得上式对应的反拉普拉斯变换为

$$\frac{\lambda^\mu}{\beta} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{\lambda^\mu}{\beta} \right)^k F_U^{s*k}(u) - \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{\lambda^\mu}{\beta} \right)^k F_U^{s*k}(u) \quad (1.7)$$

这样由(1.4)(1.7)可以得到

$$\begin{aligned} \Psi(u) &= \frac{\lambda^\mu}{\beta} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{\lambda^\mu}{\beta} \right)^k F_U^{s*k}(u) - \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{\lambda^\mu}{\beta} \right)^k F_U^{s*k}(u) = \\ &= \frac{\lambda^\mu}{\beta} + \frac{\lambda^\mu}{\beta} \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{\lambda^\mu}{\beta} \right)^k F_U^{s*k}(u) - \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{\lambda^\mu}{\beta} \right)^k F_U^{s*k}(u) = \\ &= \left(1 - \frac{\lambda^\mu}{\beta} \right) \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{\lambda^\mu}{\beta} \right)^k - \left(1 - \frac{\lambda^\mu}{\beta} \right) \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{\lambda^\mu}{\beta} \right)^k F_U^{s*k}(u) = \\ &= \left(1 - \frac{\lambda^\mu}{\beta} \right) \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{\lambda^\mu}{\beta} \right)^k \overline{F_U^{s*k}}(u) \end{aligned}$$

命题得证。

4 结论

上面, 我们给出了破产概率与 F_U 的积分尾分布 $\overline{F_U}$ 之间的关系式, 在理论研究上有重要的意义, 同时 P-K 公式表明生存函数 $\overline{\Psi_u}$ 是服从几何分布的, 对进一步研究破产概率的数字逼近以及讨论破产函数的界等许多问题都提供了一个有效方法。

参考文献:

- [1] Rolski T, Schmidli H, Schmidt V, Teugels J. Stochastic Processes for Insurance and Finance[M]. New York: Wiley and Sons, 1999.
- [2] Gerber H U. 数学风险论导引[M]. 成世学, 严颖译, 北京: 世界图书出版公司, 1997.
- [3] Asmussen S. Approximations for the probability of ruin within finite time[M]. Aktuarijsk Tidsskr, Scand, 1984.

Pollaczek—Khinchin Formula of Ruin Probability of Compound Poisson Model

YANG Shan—bing, SHE Zhi—fang

(College of science, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Jiangsu Nanjing 210016, China)

Abstract: The formula of Pollaczek—Khinchin is an important formula of calculation ruin probability. In this paper, we present the proof of Pollaczek—Khinchin formula of ruin probability of Compound Poisson risk model and correct the mistake in the literature^[3].

Keywords: compound Poisson model; ruin probability; Laplace transform