

# 基于有限元的安定下限问题分析\*

董兴平, 崔延卫

(河海大学 土木工程学院, 江苏 南京 210098)

**摘 要** 在安定下限 Melan 定理的基础上, 基于弹塑性有限元法, 得到稳定的残余应力场, 从而提出了安定分析的新方法。该方法理论清楚、实用简便, 采用特殊的实施步骤可以方便的求解复杂载荷问题。最后证明该方法用于结构安定分析是可行的。

**关键词** 下限定理; 安定分析; 残余应力场; 复杂载荷

中图分类号: TU311.2

文献标识码: A

文章编号: 1671-532X(2005)01-0069-03

在工程实际问题中, 比如在高科技领域, 如核工程、空间工程、海洋平台、水利工程等结构, 结构所受到的外载往往是在一定范围内重复变化的载荷, 当荷载小于安定载荷时, 即结构是安定的。反之, 在每个载荷循环都将产生塑性变形, 结构最终导致循环塑性(低周疲劳)或渐增塑性(棘轮)破坏, 即结构是不安定的。所以研究安定分析方法是迫切的。但由于结构安定分析最终归结为求解一个数学规划的极值问题, 而这个数学规划格式含有多个变量和约束, 而约束和变量的数目越多, 变成了大规模的数学规划问题, 造成维数障碍。目前很多研究都围绕着发展安定分析方法而展开, 其中大量的工作就是为了克服维数障碍问题。文献[1]提出了结合残余应力场的理论, 用弹塑性有限元法来分析研究结构的安定性, 避免维数障碍问题。但是该方法在实际工程应用中遇到了困难, 程序单一、解决问题有限。本文作者也提出了一种以 Melan 理论为基础结合弹塑性有限元法来求解结构的安定极限的方法, 克服了维数障碍问题, 并比文献[1]的方法简单实用。

## 1 安定分析理论基础

### 1.1 下限定理

下限定理(Melan): 如果能找到一个与时间无关的自平衡残余应力场, 它与给定荷载范围内任意路径下的外荷载产生的弹性应力的组合不违背

屈服条件:  $\varphi(\sigma_{ij}^e + \sigma_{ij}^r) < 0$  则结构安定<sup>[2]</sup>。 $\sigma_{ij}^r$  为自平衡残余应力场,  $\sigma_{ij}^e$  为弹性应力。

### 1.2 判断准则

载荷可以分为单荷载参数情况和复杂加载情况, 复杂加载是指载荷的变化取决于两个以上的独立参数。

#### 1.2.1 单荷载参数情况

确定安定极限可以用求出的残余应力场来进行判断。

$$\rho_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_{ij}^e$$

$\rho_{ij}$  式中表示残余应力场,  $\sigma_{ij}^e$  为载荷作用得到的纯弹性应力,  $\sigma_{ij}$  为得到的实际的应力场, 可以由弹塑性分析得到。

在得到了残余应力场后, 载荷在一定范围内变化, 结构的应力响应该始终保持为弹性, 此时得到的应力场即为最佳残余应力场。就说明结构达到了安定极限状态, 对应的载荷就是安定极限载荷。判断屈服准则为:  $\varphi(\rho_{ij}) \leq 0$ ,  $\varphi$  表示屈服函数。

#### 1.2.2 复杂加载情况

Borkowski 和 Kleiber 提出的理论认为荷载空间所有顶点在全部可能的加载方式作用下结构安定, 则在载荷空间内的任何加载方式下都将使结构安定。由于复杂加载是指载荷的变化取决于两个以上的独立参数, 所以在判别结构是否安定时

\* 收稿日期: 2004-12-11

作者简介: 董兴平(1976-), 男, 山东嘉祥县人, 河海大学硕士研究生。

要研究不同载荷顶点下结构的安定情况。如果任何一个载荷顶点下在全部可能的加载方式作用下结构安定,说明结构在载荷空间内的任何加载方式下都是安定的。由此可知,结构是否安定关键在于判别各种不同加载方式下结构是否安定。

判别准则可以表示为:

$$\begin{cases} \rho_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_{ij}^e \\ \varphi(\rho_{ij}) \leq 0 \\ \varphi(\rho_{ij} + \sigma_{ij}^e) \leq 0 \end{cases}$$

对于任意一个加载方式都要用上述判别式来判别。由上式可见,判别结构是否安定必须判别残余应力场是否屈服和得到残余应力场之后在弹性加载下结构是否屈服这两种不同的情况,如有任一情况不满足,则结构是不安定的。

文献[1]对复杂加载情况处理起来比较复杂,假设总共有  $m$  个载荷顶点,从其中任一点起依次对各点进行加载,如果加到某一个顶点载荷时,结构中有区域进入塑性,则以此为起点,继续保证循环一周,即再做  $m$  次加载。在对每一个顶点进行加载卸载的同时,判断各点的残余应力是否受到破坏。在求解残余应力场的过程中对于复杂加载的情况处理更为复杂,详见文献[1]。而且文献[1]采用的判别准则不能和单荷载参数情况下的判别准则很好的统一起来,本文采用的判别准则却很简单,可以把所有荷载参数情况的求解方法表达为统一的模式,同时以此为基础给出了加载方法及步骤。

## 2 加载方法及步骤

采用增量加载弹塑性分析方法,加载模式可以用曲线表示如图 1。

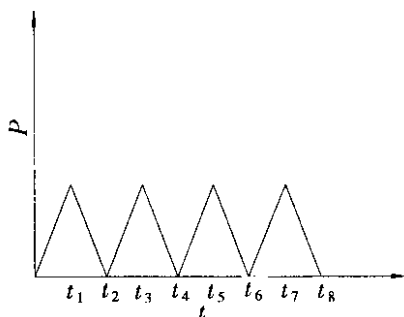


图 1 加载模式图

Fig.1 Load path

(1)在第  $i$  增量步对循环载荷作用下的结构实施弹塑性分析,在循环过程中得到一系列的残余应力场,当  $\rho_{ij}$  值稳定以后,就可以认为  $\rho_{ij}$  是一个与时间无关的应力场。残余应力场可以取时刻  $t_2$ 、 $t_4$ 、 $t_6$  和  $t_8$  得到的应力场,当然只有当  $\rho_{ij}$  稳定以后的值才是可靠的。关于  $\rho_{ij}$  值是否稳定,可以通过结果数据处理很方便的判别出来。

(2)在第  $i$  步增量结束得到残余应力场以后,再对结构进行弹性分析,然后判别结构叠加的应力场是否屈服。将这一步加载的弹性应力,叠加上前一步加载的残余应力,看有没有区域进入塑性。若有,记下此时总的残余应力场,再加第  $i+1$  步载荷。若没有,直接加第  $i+1$  步载荷。

(3)继续反复进行增量加载,相应的得到一系列的极限载荷值  $P$ 。

(4)得到的载荷  $P_{\max}$  即为安定极限载荷。

如果结构在分析阶段都满足判别条件,表明结构是安定的,可以进一步加载,如果分析过程中结构不满足安定条件,则停止加载,说明载荷  $P$  达到安定极限值。

## 3 算例分析

为了验证本文方法的正确性,采用了以下算例来验证。

### 3.1 算例 1

受循环内压  $P$  的厚壁圆筒的安定分析,是一个有解析解的验证算例。为了验证结果的正确性,本文计算了四种不同内外径比的厚壁圆筒。材料参数:弹性模量  $2.1 \times 10^5$  MPa,泊松比 0.3,屈服极限 200 MPa,本文作为平面问题来求解。本文解和解析解见表 1,曲线图如下。该厚壁圆筒的理论安定解为两倍的弹性极限值,表 1 中已经列出。可见本文的数值解和解析解是很接近的,说明本文的求解方法是可行的。

表 1 极限载荷

table1 ultimate loads

a/b	弹性极限	安定下限	两倍弹性极限	塑性极限
0.20	125.17	249.67	250.34	371.70
0.25	118.68	236.67	237.36	320.15
0.33	109.16	217.69	218.32	253.71
0.50	89.19	160.07	178.38	160.07

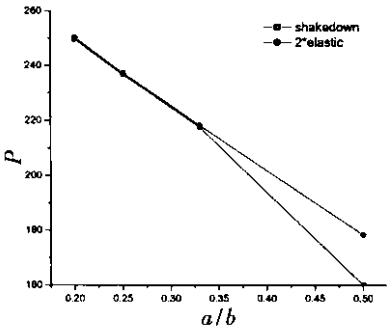


图 2 安定下限与两倍弹性极限

Fig.2 Lower bound value of shakedown and two

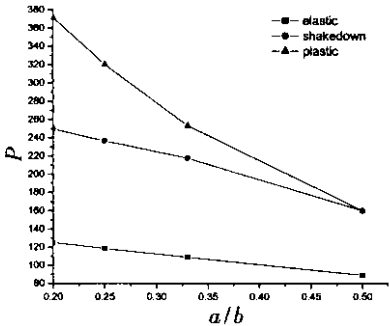


图 3 结构极限载荷包络图

Fig.3 Structure ultimate loadstimes elastic value

3.2 算例 2

某一悬臂梁,取平面应力问题研究。受均布载荷  $P$  和轴向力  $q$  作用,长  $L = 400$ ,高  $H = 80$ 。材料参数弹性模量  $E = 2.1 \times 10^5$  MPa,泊松比  $\mu = 0.3$ ,单轴屈服应力强度  $\sigma_s = 200$  MPa,采用 Mises 屈服准则。 $P$  和  $q$  均为变载  $0 \leq P \leq 4.44$  MPa,  $-240$  MPa  $\leq q \leq 0$ ,符号均以压为正。研究结构的安定问题,求解安定下限值。

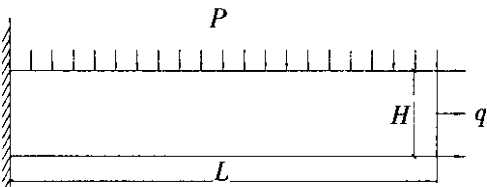


图 4 悬臂梁

Fig.4 cantalever beam

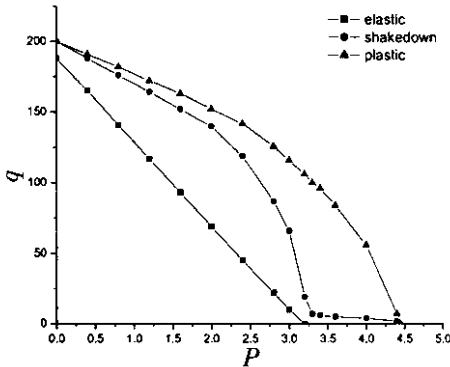


图 5 结构极限载荷包络图

Fig.5 Structure ultimate loads

从曲线图 5 我们可以看出,安定极限曲线包络图处于弹性极限值和塑性极限值包络图之间,当载荷变化值处于安定极限包络图内的区域说明结构是安定的,否则是不安定的。

由图可以发现,安定极限值并不单纯的和弹性值和塑性值有近似的关系,安定极限值在载荷变化过程中敏感性比较强。

当  $p$  在  $3.3 \sim 4.4$  变化时,安定曲线图表现出一个相当长的水平段,当  $p > 3.3$  MPa 时  $q = -7$  MPa,  $p = 4.0$  MPa 时  $q = -2$  MPa,这时  $q$  值已经是非常的小,这种情况结构是否安定取决于  $p$  的取值。结果表明,安定下限值的包络图并不一定是丰满的,特别是在复杂加载的情况下可能表现出拐点,我们应该引起注意的是当  $p > 2.5$  MPa 结构的安定极限急剧下降的情况,这更进一步的说明了安定极限值的敏感性。

4 结论

(1) 通过算例可以发现,本文采用的安定分析方法,并且精度还是很高的。

(2) 在处理复杂载荷问题时,得出的结果也很理想的。

(3) 计算结果发现,安定极限值在载荷变化过程中敏感性比较强。

(4) 对具体问题通过合理选择适当的屈服准则,便可将此方法用来解决某些具体的工程实际问题。

参考文献：

[1] 张明焕,杨海元.结构安定分析方法研究[J].应用力学学报,1994,11(4):83-90.  
[2] Maier G. Shakedown Analysis of Elasto-plastic Structures: A review of recent developments[J], Nuclear engineering and design, 1981, 66:81-95.

浆可能在实际造成新的病害,过量材料泵入面板底部引起面板和原有基层脱离接触,结果局部应力集中。

(3)一次压浆结束达到养生期后,通过弯沉检测,若板块出现单点弯沉大于控制代表值的点位处必须进行第二次压浆。但二次压浆应控制压浆量,以防止过压。同时二次压浆的浆体硬化强度应比第一次压浆强度高,否则,在面板与基层之间易形成夹层。

### 3 工程实例

204 国道盐城南段全长 98 km,1995 年建成通车,路面结构为 22 cm 厚 C30 混凝土面层 + 20 cm 厚石灰、粉煤灰土稳定粒料基层 + 20 cm 厚石灰土底基层。使用几年后路面出现大面积板底脱空及错台等现象。经过论证,2002 年决定在 700 km + 000 - 739 km + 500 路段采用压浆技术处理病害。压浆材料配比水泥:粉煤灰:水:JK24:铝粉 =

1:1 0.95 0.16 0.001;24h 抗压强度为 3 MPa,并且 24 h 开放交通。通过观测,压浆地段的唧泥现象得到根本控制,并且接缝处的弯沉值均小于 20。两年来,压浆路段的面板基本未发生新的断板等病害,原有病害的发展得到了有效控制。在经济效益上,压浆的费用是路面板块修复费用的三分之一,经济效益显著。

### 4 结语

板底脱空及错台是水泥路面中后期的主要病害之一。板底脱空在行车荷载作用下易造成面板的断裂。错台导致路面使用品质的下降。压浆是解决上述病害的有效手段,采用正确的压浆工艺,能够有效降低断板的发生率,延长路面的使用寿命,并且压浆处治对行车影响不大,可避免清除破碎板废渣,减少环境的污染,具有良好的社会效益和经济效益。因此,压浆技术和工艺在水泥砼路面养护工作中值得进一步推广。

参考文献:

- [1] 李华.水泥混凝土路面修补技术[M].北京:人民交通出版社,1999,107-111.
- [2] JTJ073.1-2001 公路水泥混凝土路面养护技术规范[S].

## Application of Grouting under Slab to Maintenance of Cement Concrete Pavement

SU Wen-hao

(Highway Management Bureau of Yancheng, Jiangsu Yancheng 224003, China)

**Abstract:** This paper analyzes the cause and endangerment of faulting of slab ends and emptying under slab of cement concrete pavement, introduces the construction method of grouting under slab, puts forward right application's this technique can rise the result of the half effort and double results and provides the reference for preventive maintenance of cement concrete pavement.

**Keywords:** grouting under slab; cement concrete pavement; application

(上接第 71 页)

## The Analysis on Lower Pound Shakedown Problems Based on FEM

DONG Xing-ping, CUI Yan-wei

(College of Civil Engineering, Hohai University, Jiangsu Nanjing 210098, China)

**Abstract:** Based on the lower bound shakedown theorems and the FEM method, the stable residual stress field was obtained and the new method on shakedown problems was proposed. The theorem was distinct and simple and convenient. It was easy to solve the complicated load problems by special means. Finally it was proved that the method present in this paper was effective.

**Keywords:** lower bound theorems; shakedown analysis; residual stress field; complicate load