

# 基于观测器的倒立摆变结构控制\*

魏晓峰, 姜长生

(南京航空航天大学 自动化学院 江苏 南京 210016)

**摘 要** 针对单级倒立摆这一非线性系统, 在对它的非线性模型进行线性化处理的基础上, 利用滑模变结构控制方法设计了控制律, 同时考虑到其实际物理过程, 设计了非线性观测器用于控制律中状态变量的估计。最后在 Matlab/ Simulink 上进行了仿真实验, 实验结果说明了该方法的有效性。

**关键词** 倒立摆; 变结构控制; 观测器

**中图分类号** TP273

**文献标识码** A

**文章编号** 1671-532X(2005)02-0022-03

## 引 言

在检验各种控制方法的控制能力的过程中, 倒立摆是一个非常典型的系统。人们在对倒立摆系统的控制过程中也在不断试图找到对不稳定、非线性和模型参数变化具有良好功能和广泛适用性的控制方法。

变结构控制<sup>[1,2]</sup>近年在倒立摆系统的稳定控制中得到了较为广泛的应用, 本文利用滑模变结构控制对倒立摆的镇定问题、台车位置调节问题进行了研究, 考虑到在控制律的设计中包含不可观测的状态量, 给出了基于观测器的变结构控制方法, 仿真结果说明了其有效性。

## 1 倒立摆数学模型及其线性化

倒立摆小车系统如图 1 所示。它由质量为  $M$  的小车, 长为  $2L$  的倒立摆构成, 倒立摆质量为  $m$ , 铰接在小车上。小车在控制函数  $u$  的作用下, 沿滑轨在  $x$  方向运动, 使倒立摆在垂直平面内稳定, 即要使摆杆与垂直方向夹角  $\varphi$  趋近于 0<sup>[3]</sup>。

为简单起见, 设倒立摆为均匀细杆, 执行机构和轴无摩擦, 此时, 系统的动力学非线性数学模型为:

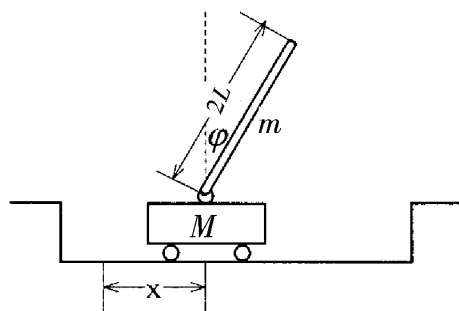


图 1 一级倒立摆系统示意图

Fig. 1 Diagram of the single inverted pendulum

$$\begin{cases} \ddot{x} = \frac{m[L\dot{\varphi}^2 \sin \varphi - \frac{3}{8}g \sin 2\varphi] - f\dot{x} + u}{M + m(1 - 3/4 \cos^2 \varphi)} \\ \ddot{\varphi} = \frac{3}{4L}(g \sin \varphi - \dot{x} \cos \varphi) \end{cases}$$

其中  $M = 1 \text{ kg}$ ,  $m = 0.1 \text{ kg}$ ,  $L = 1 \text{ m}$ ,  $f = 50 \text{ N/s}$ ,  $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ 。则在平衡点附近倒立摆系统线性化方程如下:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4.9725 & -0.7178 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3.7294 & 7.8959 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0.9756 \\ 0 \\ -0.7317 \end{bmatrix} u$$

\* 收稿日期 2005-01-07

作者简介: 魏晓峰(1980-),女,福建龙岩人,南京航空航天大学硕士研究生,主要研究方向为非线性观测器研究。

$$y = \begin{bmatrix} x_1 \\ \varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

## 2 基于观测器的变结构控制律设计

在倒立摆的变结构控制中关键问题就是切换函数及控制规律的选取,其中切换函数必须满足三个条件:存在性、可达性和稳定性<sup>[12]</sup>,由以上倒立摆线性化模型可知,该模型满足参考文献<sup>[4]</sup>中的结论2、3、4,则选取滑模面为状态变量的线性函数,但其前提是被控系统自身是渐进稳定的,一旦被控系统自身是像倒立摆系统这样的自不稳定系统,通过广义滑模存在条件和到达条件所求得的控制函数只能保证状态变量在有限的时间内到达切换面并进行滑模运动,而并不能保证被控系统的稳定性,从而导致滑模控制失败。可见对于倒立摆这样的不稳定系统选取线性切换函数是不可行的。考虑到倒立摆系统虽然不稳定,但是线性化后的系统可控,这样可以利用李雅普诺夫稳定性理论和极点配置方法相结合的方法<sup>[5]</sup>实现倒立摆系统的变结构控制。

根据李雅普诺夫稳定性理论,对于一般系统

$$\dot{X} = f(X, t)$$

只要能找到李雅普诺夫函数  $v(x)$  满足

$v(x) = \frac{\partial V}{\partial X} \dot{X} = \frac{\partial V}{\partial X} f(X, t) < 0, X \neq 0$ , 则系统的原点是渐进稳定的。如果  $v(X)$  是径向无限大的,则原点是全局渐进稳定的。

而对于线性系统  $\dot{X} = AX$ , 只要矩阵  $A$  的特征根实部为负,对于给定正定阵  $Q$ , 方程  $A^T P + PA = -Q$  总存在唯一的正定对称解  $P$ , 使得构造的正定二次型 Lyapunov 函数  $v(X)$  满足  $v(X)$  为负定二次型。因此对于线性化的倒立摆系统方程

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + bu \\ y &= Cx \end{aligned}$$

解决了矩阵  $A$  的稳定性问题,就可以利用 Lyapunov 方法进行滑模变结构控制。在确定相应的控制函数后,考虑到倒立摆系统中包含像速度  $\dot{x}$  和角加速度  $\theta$  这样不易测量的状态变量,设计相应的状态观测器,将观测器的输出带入控制量表达式中进行控制。

这样,整个控制算法的过程如下:

(1) 求解倒立摆系统在平衡点附近的线性化

状态方程;

(2) 利用极点配置,给定闭环极点,确定相应的反馈控制矩阵  $K$ ;

(3) 给定正定矩阵  $Q$ , 求出满足  $(A - bK)^T P + P(A - bK) = -Q$  的正定对称阵  $P$ ;

(4) 构造正定函数  $v = \frac{1}{2} X^T P X$ , 则令

$$\begin{aligned} \dot{v} &= X^T [P(A - bK) + (A - bK)^T P] X + 2X^T P b \bar{U} \\ &= -X^T Q X + 2X^T P b \bar{U} < 0 \end{aligned}$$

取控制规律:

$$\bar{U} = U + KX = -K \text{sign}(b^T P X), k > 0$$

切换函数  $S = b^T P X$ 。

(5) 设计系统观测器,将观测器输出带入上述控制规律,实现稳定控制。

## 3 在一级倒立摆线性化模型中的应用

在一级倒立摆系统线性化方程中取  $x_1 = x$ ,  $x_2 = \dot{x}_1 = \dot{x}$ ,  $x_3 = \varphi$ ,  $x_4 = \dot{x}_3 = \dot{\varphi}$ , 经检验  $(A, b)$  可控,  $(A, C)$  可观。对它取极点集

$$P = \begin{bmatrix} -4.8576 \\ -2.5282 + 1.5014i \\ -2.5282 + 1.5014i \\ -1.8828 \end{bmatrix}$$

计算得到  $K = [11.01 \quad 19.68 \quad 96.49 \quad 35.57]$ ,

取  $Q$  为单位阵,计算得到

$$P = \begin{bmatrix} 4.4457 & -0.5000 & 0.0269 & -0.5251 \\ -0.5000 & 19.9939 & 0.5251 & -15.1932 \\ 0.0269 & 0.5251 & -0.1141 & -0.5000 \\ -0.5251 & -15.1932 & -0.5000 & 12.2344 \end{bmatrix}$$

确定的控制规律为

$$U = \bar{U} - KX = -KX - k \text{sign}(b^T P X)$$

其中  $k = 10$ 。在确定了相应的控制规律后,针对倒立摆动态系统,设计形式如下的全维观测器:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= A\hat{x} + Bu + G(y - \hat{y}) \\ &= (A - GC)\hat{x} + Bu + Gy, \quad \hat{x}(0) = \hat{x}_0 \end{aligned}$$

定义观测器误差为  $\tilde{x} = x - \hat{x}$ , 如果原系统  $(A, C)$  完全可观,则总可以选择  $G$  阵,使得  $\text{Re}(\lambda(A - GC)) < 0$ , 从而在任意  $x_0$  下有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{x}(t) = 0$$

$$\text{取 } G = \begin{bmatrix} 1.0000 & 0 \\ -1.0000 & -0.7178 \\ -1.0000 & 2.0000 \\ -1.0000 & 6.8959 \end{bmatrix} \text{ 为观测器增益,}$$

仿真结果如下:

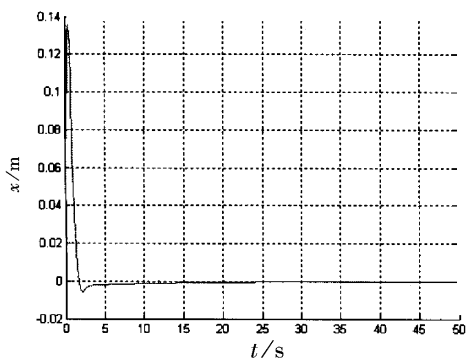


图 2 位移响应曲线

Fig.2 Response of the displacement

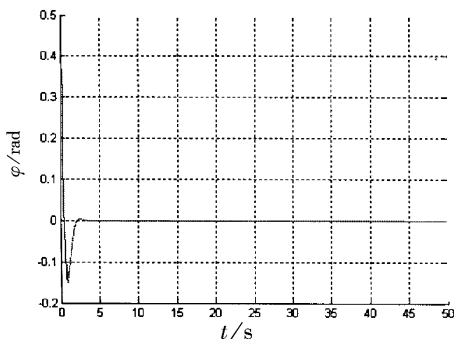


图 3 偏角响应曲线

Fig.3 Response of the angle

## 4 结论

由于倒立摆系统结构的特殊性及其控制的复杂性,传统的状态反馈方法难以达到预期的控制效果。对于线性化的倒立摆模型,针对其自身的不稳定性,在利用 Lyapunov 稳定性与极点配置结合的变结构控制律的基础上,考虑到部分参数不能直接测得,对其设计了观测器。仿真结果表明该控制器能实现原定控制目标,实时性强、响应快速,验证了变结构控制作为一种控制系统的综合方法,无论对于线性还是非线性系统均有普遍的适用性。

## 参考文献:

- [1] 姚琼荃,黄继起,吴汉松.变结构控制系统[M].重庆:重庆大学出版社,1997.
- [2] 王丰尧.滑模变结构控制[M].北京:机械工业出版社,1995.
- [3] 史晓霞,张振东,李俊芳,杨屹.二级倒立摆系统数学模型的建立及意义[J].河北工业大学学报,2001,30(5):48-51.
- [4] 袁性忠,姜新建.基于滑模变结构的倒立摆系统稳定控制[J].控制理论与应用,2004,21(5):720-723.
- [5] 姚利娜,王宏,周靖林,等.倒立摆的变结构控制方案[J].控制理论与应用,2004,21(5):724-727.

## Observer – based Variable – Structure Control for the Inverted Pendulum

WEI Xiao – feng, JIANG Chang – sheng

( College of Automation, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Jiangsu Nanjing 210016 )

**Abstract** :The variable structure control strategy is employed to control the linearized model of the inverted pendulum system. And we design a nonlinear observer to attain the state variables for the control process. Finally, simulation results were given to prove the validity of the variable structure controller.

**Keywords** :inverted pendulum; variable – structure control; observer