第 18 卷 第 3 期 盐城工学院学报(自然科学版) Vol. 18 No. 3
2005 年 9 月 Journal of Yancheng Institute of Technology(Natural Science) Jun. 2005

S-拟正规子群对有限群结构的影响*

张雪梅[1],何　鸣[2]
(1.盐城工学院 基础教学部,江苏 盐城　224003;2.江阴职业技术学院,江苏 江阴　224400)

摘　要:如果群 G 的子群 A 与 G 的每个 Sylow 子群 Gp 可交换(即 $AG_p=G_pA$),则称 A 为 G 的 S-拟正规子群。对任意有限群 G,我们利用子群的 S-拟正规性刻划群 G 的结构,给出 G 为 p-幂零群和 p-超可解群的若干充分条件.特别证明了如下结果:设 $N\lhd G$,且 N 为 p-可解群,G/N 为 p-超可解群。若 N 的每个 Sylow p-子群(或循环 p-子群)的极大子群在 G 内 S-拟正规,则 G 为 p-超可解群,并推广了相关文献的结果。

关键词:S-拟正规;p-幂零;p-超可解
中图分类号:O152　　**文献标识码**:A　　**文章编号**:1671-5322(2005)03-0009-04

利用有限群 G 的子群的不同性质来研究群 G 的结构是一个许多人都非常感兴趣的课题。子群的(弱)正规、(弱)c-正规、s-(半)正规、S-拟正规、F-S-补、条件可换、紧嵌入等等条件都与群 G 的超可解性有着密切关系。在文献[1]中,陈重穆分别从子群的 S-拟正规、s-半正规、弱正规、付正规性得到群超可解的一些条件。在文献[2,3,4]中,Ayesha Shaalan. 等利用子群的 π-拟正规性得到群超可解的一些条件。本文主要在文献[1,5]的基础上,利用子群的 S-拟正规性刻划有限群 G 的结构,给出 G 为 p-幂零群和 p-超可解群的若干充分条件,并推广相关文献的一些结果。

在本文中,所有的群均为有限群,采用的概念和符号主要取自文献[6,7]。另外,$A\cdot\lhd G$ 表示"A 为群 G 的极小正规子群",$M<\cdot G$ 表示"M 为群 G 的极大子群"。

1　概念和基本引理

定义 1　群 G 的子群 A 若与 G 的每个 Sylow 子群 G_p 可交换(即 $AG_p=G_pA$)。就称 A 为 G 的 S-拟正规子群。

引理 1[6]　设 A,B 为群 $G=AB$ 的正规 p-幂零子群,则群 G 也为 p-幂零的。

引理 2[5]　设 $A\leqslant M\leqslant G$ 且 $N\lhd G$。若 A 在 G 内 S-拟正规,则 A 在 M 内 S-拟正规,且 AN/N 在 G/N 内 S-拟正规。

引理 3[5]　设 $A,B\leqslant G$,且 $AB=BA$。若 A 在 G 内 S-拟正规,则 $A\cap B$,在 B 内 S-拟正规。

引理 4[7]　设 $A\leqslant G$,若 A 在 G 内 S-拟正规,则 A 在 G 内次正规。

引理 5[7]　若 A 是 G 的一个极大的 S-拟正规子群,则 $A\lhd G$。

引理 6[8]　(1)若 G 为 p-超可解群,则 G' 为 p-幂零群;

(2)若 G 为超可解群,则 G' 为幂零群;

(3)若 G 为超可解群,则 G 有 Sylow 塔性质。特别地,若 p 为 $|G|$ 的最大素因子,则 G 有正规 Sylow p-子群。

引理 7[9]　若 G 是 p-可解的外 p-超可解群,则

(1)$G=AN$,其中 A 为 p-超可解极大子群,$N\cdot\lhd G$,N 初等交换,且 $|N|=p^a$,$a>1$;$A\cap N=1$,$C_G(N)=N=F(G)$。

(2)$O_P(A)=1$;当 A 幂零时,$N\in \mathrm{Sylp}(G)$。

(3)以下四者等价:(i)G 为 p-幂零群;(ii)G' 为 p-幂零群;(iii)A 为交换群;(iv)A 为循环

* 收稿日期:2005-04-23
作者简介:张雪梅(1978-),女,江苏丰县人,盐城工学院助教,硕士。

群。

引理 8 设 A,H 为群 G 的两个子群。若 $H=\langle Q_1,Q_2\cdots,Q_n\rangle$，其中 $Q_1Q_2\cdots,Q_n$ 均为 G 的子群，且满足 $AQ_i=Q_iA$，$i=1,2,\cdots,n$。则 $AH=HA$。

证明：对 n 进行归纳。当 $n=1$ 时命题显然成立；对 $n>1$ 可令 $H_1=\langle Q_1,Q_2\cdots,Q_{n-1}\rangle$。则有归纳假设 $AH_1=H_1A$。从而 $H=\langle H_1,Q_n\rangle$。对 H 中任意元素 h，可写成

$$h = x_1q_{n1}^{r_1}x_2q_{n2}^{r_2}\cdots x_nq_{nk}^{r_k}$$

其中 $x_i\in H_1$，$q_{ni}\in Q_n$，$i=1,2,\cdots,k$；x_1 可能为 1，r_k 可能为零。则

$$\begin{aligned} hA &= x_1q_{n1}^{r_1}x_2q_{n2}^{r_2}\cdots x_kq_{nk}^{r_k}A \\ &= x_1q_{n1}^{r_1}x_2q_{n2}^{r_2}\cdots x_kAq_{n1_k}^{r_{1_k}} \\ &= x_1q_{n1}^{r_1}x_2q_{n2}^{r_2}\cdots Ax_{1_k}q_{n1_k}^{r1_k} \\ &\cdots \\ &= x_1q_{n1}^{r_1}Ax_{1\,2}q_{n1_2}^{r1_2}\cdots x_{1\,k}q_{n1_k}^{r1_k} \\ &= x_1Aq_{n1}^{r_1}Ax_{1\,2}q_{n1_2}^{r1_2}\cdots x_{1\,k}q_{n1_k}^{r1_k} \\ &= Ax_1q_{n1}^{r_1}Ax_{1\,2}q_{n1_2}^{r1_2}\cdots x_{1\,k}q_{n1_k}^{r1_k} \\ &= Ah'\subseteq AH \end{aligned}$$

其中，$x_{1\,i}\in H_1$，$q_{n1_i}^{r1_i}\in Q_n$，$i=1,2,\cdots,k$，$h'\in H$。因此有 $HA\subseteq AH$；同理可得 $AH\subseteq HA$。故 $AH=HA$，即知原命题成立。

引理 9[6] 设 G 为 π-可解群。则 G 至少有一个可解的 π-Hall 子群 G_π，且对于 G 的任一子群 π-子群 A，可找到一个元素 $x\in G$ 使 $A^x\subseteq G_\pi$. 特别的，任意两个 π-Hall 子群在 G 中共轭.

2 主要结果

定理 1 设 A,B 为 G 的 p-幂零子群，且 $G=AB$. 若 A,B 在 G 内 S-拟正规，则 G 为 p-幂零群.

证明：对 G 的阶进行归纳.

(a)若 A,B 均为 G 的极大的 S-拟正规子群，由引理 5 知，$A\lhd G$，$B\lhd G$. 由条件 A,B 为 p-幂零群. 故由引理 1 知，G 为 p-幂零群.

(b)若 A,B 中有一个是 G 的极大的 S-拟正规子群，不妨设 A. 由引理 5 知，$A\lhd G$. 因 B 不是 G 的极大的 S-拟正规子群，由引理 4 知，存在包含 B 的 G 的极大的 S-拟正规子群 M，则 $G=AM=MA$，且

$$M = M\cap G = M\cap AB - (M\cap A)B$$

因 A,B 在 G 内 S-拟正规，由引理 2 及引理 3 知，$M\cap A$ 在 M 内 S-拟正规，B 在 M 内 S-拟正规. 有归纳假设知，M 为 p-幂零群. 且由引理 5 知 $M\lhd G$. 因 $G=AM$，A,M 为 G 的 p-幂零正规子群，由引理 1 知，G 为 p-幂零群.

(c)若 A,B 都不是 G 的极大的 S-拟正规子群，则由引理 4 知，分别存在包含 A,B 的 G 的极大的 S-拟正规子群 M_1,M_2，使 $A<M_1<G$，$B<M_2<G$. 则 $G=AM_2=M_2A$，且

$$M_2 = M_2\cap G = M_2\cap AB = (M_2\cap A)B$$

因 B 在 M_2 内 S-拟正规，$M_2\cap A$ 在 M_2 内 S-拟正规，且 $B,M_2\cap A$ 均为 p-幂零群. 由归纳假设知，M_2 为 p-幂零群，由引理 5 知 $M_2\lhd G$. 同理可证，M_1 为 p-幂零群，且 $M_1\lhd G$. 由 $G=AB$ 知 $G=M_1M_2$，而 M_1,M_2 为 G 的 p-幂零正规子群. 故由引理 1 知，G 为 p-幂零群.

推论 1[5] 设 A,B 为群 G 的可解(幂零)子群，且 $G=AB$. 若 A,B 均在 G 内 S-拟正规，则为可解(幂零)群.

定理 2 设 G 为 p-可解群. 若 G 的每个 Sylow p-子群的极大子群在 G 内 S-拟正规，则 G 为 p-超可解群.

证明：令 G 是使命题不真的极小阶反例.

先证条件是商群闭的.

事实上，设 $H\cdot\!\lhd G$. 设 $P/H\in\mathrm{Sylp}(G/H)$，$P_1/H <\cdot\, P/H$，若令 $P_0\in\mathrm{Sylp}(P)$，$P_2\in\mathrm{Sylp}(P_1)$. 则 $P_0\in\mathrm{Sylp}(G)$，且 $P_2<\cdot\, P_0$. 显然 $P/H=P_0H/H$，$P_1/H=P_2H/H$. 由条件知 P_2 在 G 内 S-拟正规. 故由引理 2 知，P_1/H 在 G/H 内 S-拟正规. 即知条件是商群闭的.

故若 G 不是 p-超可解群，则 G 是 p-可解外 p-超可解群，由引理 7 知，

$$G = AN,\ |N| = p^a,a > 1,A\cap N = 1$$

其中 $A\cdot\!\lhd G$，A 为 p-超可解极大子群.

若 $N\in\mathrm{Sylp}(G)$，则 A 为 N 在 G 中的 p-补. 令 $N_1<\cdot\, N$. 由条件 N_1 在 G 内 S-拟正规. 知 N_1 与 G 的 Sylow 子群可换，而 N 由 G 的 Sylow 子群生成. 从而由引理 8 知 $N_1A=AN_1$ 为子群. 若 $AN_1=G$，则 $|G:A|=|N_1|=|N|$，与 $N_1<\cdot\, N$ 矛盾. 故 $AN_1\neq G$，又由 A 在 G 中的极大性，$AN_1=A$，$N_1\leqslant A$. 又 $A\cap N=1$，$N_1=1$，$|N|=p$. 与 $a>1$ 矛盾. 故 $N\notin\mathrm{Sylp}(G)$.

令 $P\in\mathrm{Sylp}(A)$. 于是 $S=PN\in\mathrm{Sylp}(G)$. 且存在 S 的极大子群 P_1，使得 P_1 包含 P，显然

$$|N:P_1\cap N| = |NP_1:P_1| = p$$

因 G 为 p-可解群，G 有 p-补 H. 由条件 P_1 在 G

内 S-拟正规，知 P_1 与 G 的 Sylow$p$-子群可换，而 H 由 G 的 Sylow 子群生成. 从而由引理 8 知 $P_1H=HP_1$ 为子群.

因 $HP_1\cap N<N$. 事实上，若 $HP_1\cap N=N$，则 $N\subseteq HP_1$，$HP_1N=HP_1$，而 $HP_1N=H(PN)=HS=G$，即得 $HP_1=G$，$|G:H|=|P_1|=|S|$. 与 $P_1\lessdot S$ 矛盾.

又 $P_1\cap N\lessdot N$，且 $P_1\cap N\subseteq HP_1\cap N$，故 $HP_1\cap N=P_1\cap N$.

令 $HP_1\cap N=P_1\cap N=D$，又显然 $D\lhd N$，$D\lhd HP_1$. 故 $D\lhd\langle HP_1,N\rangle=G$. 由 N 的极小性知 $D=1$. 从而 $|N|=p$，与 $\alpha>1$ 矛盾.

故 G 为 p-超可解群.

推论 2　设 G 为可解群. 若 G 的每个 Sylow 子群的极大子群在 G 内 S-拟正规，则 G 为超可解群.

定理 3　设 $N\lhd G$，且 N 为 p-可解群，G/N 为 p-超可解群. 若 N 的每个 Sylow$p$-子群的极大子群在 G 内 S-拟正规，则 G 为 p-超可解群 .

证明：令 G 是使命题不真的极小阶反例.

先证条件是商群闭的.

事实上，设 $H\cdot\lhd G$. 则有 $NH/H\lhd G/H$，$NH/H\cong N/(N\cap H)$，NH/H 为 P-可解群，$(G/H)/(NH/H)\cong G/NH\cong(G/N)/(NH/N)$为 P-超可解群. 若 $P/H\in \mathrm{Sylp}(G/H)$，$P_1/H\lessdot P/H$，令 $P_0\in\mathrm{Sylp}(P)$，$P_2\in\mathrm{Sylp}(P_1)$. 则 $P_0\in\mathrm{Sylp}(G)$，$P_2\lessdot P_0$，且 $P/H=P_0H/H$，$P_1/H=P_2H/H$. 由引理 2 知，P_1/H 在 G/H 内 S-拟正规. 即知条件是商群闭的.

由引理 2 知 N 的每个 Sylow$p$-子群的极大子群 N 在 S-内拟正规. 由定理 3 知 N 为 p-超可解群. 从而 G 为 p-可解群.

故若 G 不是 p-超可解群，则 G 是 p-可解外 p-超可解群，由引理 7 知，

$$G=MP_0,\ |P_0|=p^\alpha,\alpha>1,M\cap P_0=1$$

其中 $P_0\cdot\lhd G$，M 为 p-超可解极大子群.

由条件显然 $G>N>1$，又因 N 为 p-超可解群，由引理 6 知 Np-幂零. 由文献[1]6.1 节引理 7，

$$N=BP_0,p\nmid|B|,$$

于是 $P_0\in\mathrm{Sylp}(N)$. 令 $P_1\in\mathrm{Sylp}(M)$，则 $P=P_1P_0\in Sylp(G)$. 令 $P_2\lessdot P_0$，且 $P_2\lhd P$，则 $P_1P_2=P_2P_1$. 由条件 P_2 在 G 内 S-拟正规，得 P_2 与 M 的每个 Sylow 子群可换，而 M 由其 Sylow 子群生成. 由引理 8 知 $P_2M=MP_2$. 显然 $G>P_2M>M$，与 $M\lessdot G$ 矛盾.

故 G 为 p-超可解群.

推论 3[1]　设 $N\lhd G$，G/H 为超可解群. 若 N 的每个 Sylow 子群的极大子群在 G 内 S-拟正规，则 G 为超可解群.

定理 4　设 G 为 p-可解群. 若 G 的每个循环 p-子群在 G 内 S-拟正规，则 G 为 p-超可解群.

证明：令 G 是使命题不真的极小阶反例.

先证条件是商群闭的.

事实上，设 $H\cdot\lhd G$. 由于 G 为 p-可解群，故 H 为 p-群或为 p'-群. 对 G/H 的每个循环 p-子群 $K/H=\langle zH\rangle=\langle z\rangle H/H$，$|zH|=p^\alpha$. 则 $z^{p^\alpha}\in H$. 若 H 为 p'-群，则 $|z|=p^\alpha$. 若 H 为 p-群，由$\langle z\rangle H/H\cong\langle z\rangle/(\langle z\rangle\cap H)$知$\langle z\rangle$为 p-群. 由条件$\langle z\rangle$在 G 内 S-拟正规，由引理 2 知，K/H 在 G/H 内 S-拟正规. 即知条件是商群闭的.

故若 G 不是 p-超可解群，则 G 是 p-可解外 p-超可解群，由引理 7 知，

$$G=AN,\ |N|=p^\alpha,\alpha>1,A\cap N=1$$

其中 $N\cdot\lhd G$，A 为 p-超可解极大子群.

对 N，由引理 9 知，存在 $G_p\in Sylp(G)$，使得 $N\subseteq G_p$. 令$\langle x\rangle$为 G_p 的包含在 N 中的极小正规子群. 显然$|x|=p$. 因 G 为 p-可解群，G 有 p-补 $G_{p'}$. 由条件$\langle x\rangle$在 G 内 S-拟正规，而 $G_{p'}$由 G 的 Sylow 子群生成. 从而由引理 8 知$\langle x\rangle G_{p'}=G_{p'}\langle x\rangle$. 因

$$\langle x\rangle=\langle x\rangle G_{p'}\cap N\lhd\langle x\rangle G_{p'}$$

得 $G_{p'}\subseteq N_G(\langle x\rangle)$. 又显然 $G_p\subseteq N_G(\langle x\rangle)$，故$\langle x\rangle\lhd G$. 由 N 之极小性知$\langle x\rangle=N$，即知$|N|=p$，与 $\alpha>1$ 矛盾.

故 G 为 p-超可解群.

推论 4　设 G 为可解群. 若 G 的每个循环子群在 G 内 S-拟正规，则 G 为超可解群.

定理 5　设 $N\lhd G$，且 N 为 p-可解群，G/N 为 p-超可解群. 若 N 的每个循环 p-子群均在 G 内 S-拟正规，则 G 为 p-超可解群.

证明：令 G 是使命题不真的极小阶反例.

由引理 2 知 N 的每个循环 p-子群均在 N 内 S-拟正规，由定理 4 知 N 为 p-超可解群. 从而 G 为 p-可解群.

先证条件是商群闭的.

事实上，设 $H\cdot\lhd G$. 由于 G 为 p-可解群，故 H 为 p-群或为 p'-群. 由条件知 $NH/H\lhd G/H$，

$NH/H \cong N/(N \cap H)$，NH/H 为 p-可解群，$(G/H)/(NH/H) \cong G/NH \cong (G/N)/(NH/N)$ 为 p-超可解群. 且对 NH/H 的每个循环 p-子群 $K/H = \langle zH \rangle = \langle z \rangle H/H$，以及 $\langle z \rangle$ 在 G 内 S-拟正规，且由定理 5 的证明知 K/H 在 G/H 内 S-拟正规. 即知条件是商群闭的.

故若 G 不是 p-超可解群，则 G 是 p-可解外 p-超可解群，由引理 7 知，

$$G = MP_0, \ |P_0| = p^{\alpha}, \alpha \quad 1, M \cap P_0 = 1$$

其中 $P_0 \cdot \lhd G$，M 为 p-超可解极大子群.

由条件显然 $G > N > 1$，又因 N 为 p-超可解群，由引理 6 知 N p-幂零. 由[1]第 6.1 节引理 7，

$$N = BP_0, p \nmid |B|,$$

于是 $P_0 \in \mathrm{Sylp}(N)$. 令 $P_1 \in \mathrm{Sylp}(M)$，则 $P = P_1 P_0 \in \mathrm{Sylp}(G)$. 令 $\langle x \rangle$ 为 P 的包含在 P_0 中的极小正规子群，显然 $|x| = p$. 下证 $\langle x \rangle \lhd G$.

事实上，由 G 为 p-可解群，G 有 p-补 G_{p}'，$\langle x \rangle$ 为 N 的循环子群，由条件 $\langle x \rangle$ 在 G 内 S-拟正规，而 G_{p}' 由 G 的 Sylow 子群生成. 从而由引理 8 知 $\langle x \rangle G_{p}' = G_{p}' \langle x \rangle$. 因

$$\langle x \rangle = \langle x \rangle G_{p}' \cap N \lhd \langle x \rangle G_{p}'$$

得 $G_{p}' \subseteq N_G(\langle x \rangle)$. 又显然 $G_p \subseteq N_G(\langle x \rangle)$，故 $\langle x \rangle \lhd G$. 由 P_0 之极小性知 $\langle x \rangle = P_0$，即知，$|P_0| = p$，与 $\alpha > 1$ 矛盾.

故 G 为 p-超可解群.

推论 5　设 $N \lhd G$，且 N 为可解群，G/H 为超可解群. 若 N 的每个循环子群均 G 在内 S-拟正规，则 G 为超可解群.

参考文献：

[1] 陈重穆. 内外群与极小非群[M]. 重庆：西南师范大学出版社，1988.

[2] Shaalan A. The influence of π-quasinormality of some subgroups on the structure of a finite group[J]. Arch. Math. Hung.，1990，56：287-293.

[3] Asaad M，Ramadan M，Shaalan A. Influence of π-quasinormality on maximal subgroups of Sylow subgroups of Fitting subgroups of a finite group[J]. Arch. Math. 1991，56：521-527.

[4] 涂道兴. 关于有限群的 π-拟正规子群[J]. 四川师范大学学报(自然科学版). 1999，22(4)：387-390.

[5] 海进科. 有限群的 s-拟正规子群[J]. 曲阜师范大学学报. 1995，21(1)：23-25.

[6] 郭文彬. 群类论[M]. 北京：科学出版社，2000.

[7] 张远达. 幂零与可解之间——可解群研究[M]. 武汉：武汉大学出版社，1988.

[8] 徐明曜. 有限群导引(上、下)[M]. 北京：科学出版社，1987.

[9] 陈顺民. π-超可解群[J]. 西南师范大学学报(自然科学版). 2002，27(6)：836-840.

Influence of S-quasinormal Subgroups on the Structure of Finite Groups

ZHANG Xue-mei[1]，HE Ming[2]

(1. Department of Basic Sciences，Yancheng Institute of Technology，Jiangsu Yancheng　224003，China；
2. Jiangyin Poly College，Jiangsu Jiangyin　214400，China)

Abstract：If there exists a subgroup A of G such that $AG_p = G_pA$ and $p \mid |G|$，then A is a S- quasinormality subgroup of G. Let G be a finite group. In this paper，we study the structure of finite group G by using of the quasinormality of subgroups，condition and obtain some sufficient conditions for a group belonging to p-nilpotent groups and p-superslovable groups. Particularly，the author proves the following result：Let G be a group，$N \lhd G$，and N be p- soluble，G/N be p-supersoluble. If every maximal subgroup of Sylow p- subgroup is S- quasinormalied in G，then G is p-superslovable. Moreover，some relevant results are generalized.

Keywords：S-quasinormal；p-nilpotent；p-supersoluble