

F -单位元环上的 Maschke-型定理*

张玲萍

(淮阴师范学院楚州校区, 江苏 淮安 223200)

摘 要: 讨论了对任意可迁 G -集 A 具有局部单位元的 G -分次环与 G -集 A 的 Smash 积, 证明了有关的 Maschke-型定理。将 Maschke-型定理推广到具有 F -单位元的 G -分次环上。

关键词: Smash 积; F -单位元; 局部单位元。

中图分类号: O151

文献标识码: A

文章编号: 1671-5322(2005)03-0013-04

M. Cohen 和 S. Montgomery^[1-2]给出了有限群 G -分次环(分次代数)、Smash 积以及群作用之间的关系, 讨论了一个与有限群 G -分次环有关的一个 Maschke-型定理。随后有许多人对分次环与 Smash 积进行了深入讨论^[3]。本文在此基础上将 Maschke-型定理的有关性质推广到具有 F -单位元的 G -分次环上。

1 准备知识

在本文中, G 表示任意群, 其单位元记为 e 。环 R 是 G -分次的, 若 $R = \bigoplus_{g \in G} R_g$ (加群直和), 且满足 $R_g R_h \subseteq R_{gh}$, $\forall g, h \in G$ 。 R_g 中的元素称为阶为 g 的齐次元素, 若 $r \in R$, 用 r_g 表示 r 的 g -分量, R 的全体齐次元素之集记为 $h(R)$ 。

设 A 是 G -集, 即有映射 (G 在 A 上的作用): $G \times A \rightarrow A$ 满足条件: $g(ha) = (gh)a$, $\forall g, h \in G, a \in A$, 及 $ea = a$, $\forall a \in A$, 其中 e 是群 G 的单位元。若对于 $\forall x, y \in A$, 总有 $g \in G$, 使 $gx = y$, 则称 G -集 A 是可迁的。由于每个可迁 G -集 A 同构于 G 的某个子群 H 在 G 的全体左陪集 $G/H = \{\sigma_i H, i \in I\}$ 自然作成的 G -集, 其中 $\{\sigma_i H, i \in I\}$ 是 H 在 G 中的左陪集的全体代表集。易知任意一个 G -集 A 都是一些可迁 G -集之并。为此, 我们只局限于讨论 G -集 $G/H = \{\sigma_i H, i \in I\}$, H 是 G 的任意子群。

定义 1.1 设 A 为 G -集, G -分次环 R 上的

模 M 称作 A -分次模, 如果 $M = \bigoplus_{a \in A} M_a$ (加群直和), 且满足 $R_g M_a \subseteq M_{ga}$, $\forall g \in G, a \in A$ 。 A -分次模 M 到 A -分次模 N 的同态 ϕ 称作 A -分次同态, 如果 $\phi(M_a) \subseteq N_a$, $\forall a \in A$ 。

G -分次环 R 上的分次模范畴记作 $(G, R)\text{-gr}$ (也记作 $R\text{-gr}$)。模的基本性质均参见文献^[4]。 G -分次环 R 上所有 G -集 G/H -分次模与它们之间 G/H -分次同态作成的范畴记作 $(G/H, R)\text{-gr}$ 。

定义 1.2 环 R 称为具有局部单位元, 是指 R 的每个有限子集都包含于形如 cRc 的子环, 其中 $c^2 = c \in R$ 。

定义 1.3 设 T 为环 R 的一个有限子集, $r \in R$ 称为 T 的一个 F -单位元, 是指对 $\forall x \in T$, 都有 $xr = rx = rxr = x$ 。环 R 称为具有 F -单位元, 是指 R 的每个有限子集都有 F -单位元。

显然, 具有局部单位元的环一定是具有 F -单位元的环。

定义 1.4 设 G 是任意群, R 是 G -分次环, $G/H = \{\sigma_i H, i \in I\}$ 是任意可迁 G -集。对于任一 $\sigma_i H$ 引入符号 $P_{\sigma_i H}$, 以 $\{P_{\sigma_i H} i \in I\}$ 为自由基作自由 R -模 $R \# G/H = \bigoplus_{i \in I} R P_{\sigma_i H}$, 其中乘法定义为:

$(a P_{\sigma_i H})(b P_{\sigma_j H}) = \sum_{\substack{g \in G \\ g \sigma_j H = \sigma_i H}} ab_g P_{\sigma_j H}$, 其中 $a, b \in R$, $b = \sum_{g \in G} b_g$, 而 $b_g \in R_g$ 是元素 b 的 g -分量。由于 G/H 是可迁的, 因而上式右端的求和式是合理

* 收稿日期: 2005-06-29

作者简介: 张玲萍 (1969-), 女, 江苏淮阴人, 讲师, 硕士。研究方向: 代数学。

的。加群 $R \# G/H$ 关于上述乘法作成结合环,称之为 G -分次环 R 与 G/H 的 Smash 积,记为 $R \# G/H$ 。

如果 R 是具有单位元的 G -分次环,当 G/H 有限时, $R \# G/H$ 是具有单位元的环;当 G/H 无限时, $R \# G/H$ 是无单位元的环,但它是具有局部单位元的环^[3]。如果 R 是具有局部单位元的 G -分次环,则 $R \# G/H$ 是具有 F -单位元的环(参见引理 2.1)。

如果 $RM = M$,则左 R -模 M 称为单式模。本文中说的模总是指左单式模。

2 主要结果

先讨论具有 F -单位元分次环上分次模范畴的性质。类似于局部单位元的讨论,可得到下面两个引理^[6]。

引理 2.1 设 R 是具有 F -单位元的 G -分次环,则有:(1) $h(R)$ 中每个有限子集都有阶为 e 的 F -单位;(2) $R \# G/H$ 是具有 F -单位元的环。

引理 2.2 设 R 是具有 F -单位元的 G -分次环,则:(1) 左 $R \# G/H$ -模 U 是单式的充要条件为对于 U 的每个有限子集 T ,存在 $\omega = \sum_{\sigma_i H \in I} c_e P_{\sigma_i H}$, L 为 G/H 的有限子集,使得 $\omega x = x$, $\forall x \in T$;(2) 每个单式 $R \# G/H$ -模的子模也是单式的。

下面将模同构的性质推广到具有 F -单位元的环上。

定理 2.3 若 R 是具有 F -单位元的 G -分次环,则 G/H -分次 R -模范畴 $(G/H, R)\text{-gr}$ 与 $R \# G/H$ -模范畴 $R \# G/H\text{-mod}$ 是同构的,即 $(G/H, R)\text{-gr} \cong R \# G/H\text{-mod}$ 。

证明:首先,若 $U \in R \# G/H\text{-mod}$,则 U 可用如下的方法看作一个 G/H -分次 R -模 U^* ,对 $\forall \sigma_i H \in G/H$,令

$$U_{\sigma_i H}^* = \sum_{\sigma_k H \in G/H} \left(\sum_{\substack{p \sigma_k H = \sigma_i H \\ p \in G}} R_p P_{\sigma_k H} \right) U. \quad (1)$$

易见 $U_{\sigma_i H}^*$ 是 U^* 的子加群。注意到 $R \# G/H$ 是以 $\{P_{\sigma_i H}, i \in I\}$ 为自由基的自由左 R -模, $R \# G/H = \bigoplus_{i \in I} R P_{\sigma_i H}$,所以 $R \# G/H$ 中的任一元 x 的分解式中的每一个加项都在 $R \# G/H$ 中,从而 $U^* = \sum_{\sigma_i H \in G/H} U_{\sigma_i H}^*$,易证此和为直和。

再在 U^* 上定义 G/H -分次 R -模结构:

$$ru = rP_{\sigma_i H} u, \text{ 对 } \forall r \in R, u \in U_{\sigma_i H}^* \quad (2)$$

则对于 $\forall r, s \in R, u \in U_{\sigma_i H}^*$ 有

$$\begin{aligned} r(su) &= \sum_{g \in G} r(s_g u) = \sum_{g \in G} r(s_g P_{\sigma_i H} u) \\ &= \sum_{g \in G} rP_{g\sigma_i H} (s_g P_{\sigma_i H} u) = \sum_{g \in G} (rP_{g\sigma_i H} S_g P_{\sigma_i H}) u \\ &= \sum_{g \in G} (rs_g P_{\sigma_i H}) u = (rs) P_{\sigma_i H} u = (rs) u \end{aligned}$$

而且,对 $\forall r \in R_g, u \in U_{\sigma_i H}^*$,有

$$\begin{aligned} ru &= rP_{\sigma_i H} u = r_g P_{\sigma_i H} u \\ &= c_e P_{g\sigma_i H} r_g P_{\sigma_i H} u \subseteq \sum_{\sigma_k H \in G/H} \sum_{\substack{p \sigma_k H = g\sigma_i H \\ p \in G, g \in G}} R_p P_{\sigma_k H} U \\ &= U_{g\sigma_i H}^* \end{aligned}$$

(其中 c_e 与 r, u 有关),即 $R_g U_{\sigma_i H}^* \subseteq U_{g\sigma_i H}^*$,对 $\forall \sigma_i H \in G/H$ 。所以 U^* 是 G/H -分次 R -模。又由于 $(R \# G/H)U = U$,有 $RU^* = U^*$,即 U^* 是一个单式的 G/H 型分次 R -模,即

$$U^* \in (G/H, R)\text{-gr}$$

设 $U, V \in R \# G/H\text{-mod}$,及 $R \# G/H$ -模同态 $f: U \rightarrow V$ 。由于对任意的 $u \in U$, $f(u) \in V$,注意到 U, V 都是左单式 $R \# G/H$ -模。由引理 2.2,有

$$\omega = \sum_{\sigma_i H \in I} c_e P_{\sigma_i H} \in R \# G/H, \text{ 使得}$$

$$u = \left(\sum_{\sigma_i H \in I} c_e P_{\sigma_i H} \right) u, f(u) = \left(\sum_{\sigma_i H \in I} c_e P_{\sigma_i H} \right) f(u)。$$

其中 L 是 G/H 的某个有限子集, $c_e \in R_e$ 是一个 F -单位元,从而有

$$f^*: U^* \rightarrow V^*$$

$$\begin{aligned} f^*(ru) &= f\left[\left(\sum_{\sigma_i H \in I} rc_e P_{\sigma_i H}\right)u\right] \\ &= \sum_{\sigma_i H \in I} rc_e P_{\sigma_i H} f(u) = r \sum_{\sigma_i H \in I} c_e P_{\sigma_i H} f(u) \\ &= rf^*(u), \forall r \in R \end{aligned}$$

又对 $\forall u \in U_{\sigma_i H}^*$,有

$$f^*(u) = f(c_e P_{\sigma_i H} u) = c_e P_{\sigma_i H} f(u) \in V_{\sigma_i H}^*$$

这里的 $\omega = c_e P_{\sigma_i H}$ 是由 u 和 $f^*(u)$ 用引理 2.2 中的方法确定的,因此 $f^*: U^* \rightarrow V^*$ 是保持 G/H -分次的 R -模同态。所以

$$(\)^*: R \# G/H\text{-mod} \rightarrow (G/H, R)\text{-gr}$$

$$U \rightarrow U^*$$

$$f \rightarrow f^*$$

是加法共变函子,这里 $f: U \rightarrow V$ 是 $R \# G/H$ -模同态, $f^*: U^* \rightarrow V^*$ 是 G/H -分次的 R -模同态。

其次,任一 G/H -分次 R -模 V 可用如下的方法看作一个 $R \# G/H$ -模。定义: $(rP_{\sigma_i H})v = rv_{\sigma_i H}$, 对 $\forall rP_{\sigma_i H} \in R \# G/H, \forall v \in V$ (3)

同理可证 $g_*: V_* \rightarrow U_*$ 是 $R \# G/H$ -模同态, 从而

$$(\)_*: (G/H, R)\text{-gr} \rightarrow R \# G/H\text{-mod}$$

$$V \rightarrow V_*$$

$$g \rightarrow g_*$$

是加法共变函子, 其中, $g: V \rightarrow U$ 是 G/H -分次 R -模同态, $g_*: V_* \rightarrow U_*$ 是 $R \# G/H$ -模同态。

再注意, 对任一 $R \# G/H$ -模 U , 由(2)定义了一个 G/H -分次 R -模 U^* 。

由(3)定义了一个 $R \# G/H$ -模 $(U^*)_*$, 因为

$$(rP_{\sigma_i H})(u^*)_* = r(u^*)_{\sigma_i H} = r(c_e P_{\sigma_i H} u)$$

$$= (rc_e P_{\sigma_i H})u = (rP_{\sigma_i H})u.$$

其中 $c_e P_{\sigma_i H} \in R \# G/H$ 是与 u, r 有关的, u^* 表示将 $u \in U$ 看成 U^* 中元, u_* 表示将 $u \in U$ 看成 U_* 中元, 所以 $(U^*)_* = U$ 。同理, 对于任意 $R \# G/H$ -模同态 f 有 $(f^*)_* = f$ 。与上述方法相同, 对

$\forall V \in (G/H, R)\text{-gr}$ 有 $(V_*)^* = V$, 对于任意的 G/H -分次 R -模同态 g 有 $(g_*)^* = g$ 。所以

$(\)^*, (\)_*$ 是互逆的同构函子, 定理得证。

定理 2.4 设 R 是具有 F -单位元的 G -分次环, 则: $R \# G/H \# H/K \cong R \# G/K$, 其中 H, K 是 G 的子群, 且 $K \subseteq H \subseteq G$ 。

证明: 首先令 $G/H = \{\sigma_i H, i \in I\}$, $H/K = \{\delta_l K, l \in J\}$, 则 $G/K = \{\sigma_i \delta_l K, i \in I, l \in J\}$

令 $\phi: (R \# G/H) \# H/K \rightarrow R \# G/K$

$$(rP_{\sigma_i})P_{\delta_l} \rightarrow rP_{\sigma_i \delta_l}$$

再依线性扩张到整个环上去, 显然 ϕ 是加群同构。

定理 2.5 设 R 是具有 F -单位元的 G -分次环, K, H 是 G 的子群, 且 $K \subseteq H$, 将 H 分次环 $R \# G/H$ 看成 H -集 H/K -分次环, 则 H/K -分次 $R \# G/H$ -模范畴 $(H/K, R \# G/H)\text{-gr}$ 与 G/K -分次 R -模范畴 $(G/K, R)\text{-gr}$ 同构, 即 $(H/K, R \# G/H)\text{-gr} \cong (G/K, R)\text{-gr}$ 。

证明: 因为 G/H 是 H -分次环, $K \subseteq H$, H, K 是 G 的子群, 所以环 $R \# G/H$ 可自然地看成 H -集 H/K -分次环。因为 R 是具有 F -单位元的 G -分次环, 据引理 2.1, $R \# G/H$ 具有 F -单位元。由定理 2.3, H -集 H/K -分次 $R \# G/H$ -模范畴 $(H/K, R \# G/H)\text{-gr}$ 与 $(R \# G/H) \# H/K\text{-mod}$ 同构。由定理 2.4, $R \# G/H \# H/K \cong R \# G/K$, 所以, $(H/K, R \# G/H)\text{gr} \cong (G/K, R)\text{-mod}$ 。再由定理 2.3 知, $R \# G/K\text{-mod} \cong (G/K, R)\text{-gr}$, 故 $(H/K, R \# G/H)\text{-gr} \cong (G/K, R)\text{-gr}$ 。得证。

推论 2.6 设 R 是具有 F -单位元的 G -分次环, H 是 G 的子群, 则 H -分次 $R \# G/H$ -模范畴与

G -分次模范畴同构。

证明: 在定理 2.5 中, 取 $K = \{e\}$ 即可。

定理 2.7 设 R 是具有 F -单位元的 G -分次环, U 是一个单式 $R \# G/H$ -模, V 是 U 的一个 $R \# G/H$ -子模。若 V 是 U 的 R -模直和项, 则 V 作为 $R \# G/H$ -模是 U 的 $R \# G/H$ -直和项。

证明: 由定理 2.3, $R \# G/H$ -模 U 可看成一个 G/H -分次 R -模, 所以 U 可看成 R -模。因为 V 是 U 的 R -直和项, 令 $\pi: U \rightarrow V$ 为 R -模投射。由于 U 是单式 $R \# G/H$ -模, 故对任意有限子集 $T \subseteq U$, 由引理 2.2 存在 $\omega = \sum_{\sigma_i H \in I} c_e P_{\sigma_i H}$, L 为 G/H 的有限子集, 使得 $\omega t = t$, 对 $\forall t \in T$, 且 $c_e t = t c_e = t$, 对 $\forall t \in T$ 。因此可定义映射

$$\lambda: U \rightarrow V, \lambda(u) = \sum_{\sigma_i H \in I} c_e P_{\sigma_i H} (c_e P_{\sigma_i H} u)^\pi,$$

这里 $\omega = \sum_{\sigma_i H \in I} c_e P_{\sigma_i H}$ 与含 u 的有限子集

$T \subseteq R \# G/H$ 有关, 由于 T 不同, 从而 ω 不唯一, 但易知 $\lambda(u)$ 是唯一确定的。

现在证明 λ 是 U 到 V 的 $R \# G/H$ -投射, 首先 $\lambda|_U = 1_u$, 这是因为若 $v \in V$, 则 $rP_{\sigma_i H} v \in V$, 对 $\forall r \in R, \forall \sigma_i H \in G/H$ 成立。因此

$(rP_{\sigma_i H} v)^\pi = rP_{\sigma_i H} v$, 从而

$$\lambda(v) = \sum_{\sigma_i H \in I} c_e^2 P_{\sigma_i H} v = c_e \left(\sum_{\sigma_i H \in I} c_e P_{\sigma_i H} \right) v = c_e \omega v = v,$$

这里的 $\omega = \sum_{\sigma_i H \in I} c_e P_{\sigma_i H}$ 与 v 有关。

其次, λ 是 $R \# G/H$ -模同态, 事实上, 若 $u \in U, rP_{\sigma_i H} \in R \# G/H$, 则

$$(rP_{\sigma_i H})\lambda(u) = rP_{\sigma_i H} \left[\sum_{\sigma_j H \in I} c_e P_{\sigma_j H} (c_e P_{\sigma_j H} u)^\pi \right] \\ = rP_{\sigma_i H} (c_e P_{\sigma_i H} u)^\pi.$$

这里的 $\omega = \sum_{\sigma_j H \in I} c_e P_{\sigma_j H}$, 与 $u, rP_{\sigma_i H}, rP_{\sigma_i H} u$, $(rP_{\sigma_i H} u)^\pi$ 有关。另一方面,

$$\lambda(rP_{\sigma_i H} u) = \sum_{\sigma_j H \in I} c_e P_{\sigma_j H} (c_e P_{\sigma_j H} rP_{\sigma_i H} u)^\pi \\ = \sum_{\sigma_j H \in I} c_e P_{\sigma_j H} \left(\sum_{\substack{p \in G \\ p\sigma_i H = \sigma_j H}} r_p P_{\sigma_i H} u \right)^\pi \\ = \sum_{\sigma_j H \in I} c_e P_{\sigma_j H} \sum_{\substack{p \in G \\ p\sigma_i H = \sigma_j H}} r_p (c_e P_{\sigma_i H} u)^\pi \\ = \sum_{\sigma_j H \in I} \left(\sum_{\substack{p \in G \\ p\sigma_i H = \sigma_j H}} r_p \right) c_e P_{\sigma_i H} (c_e P_{\sigma_i H} u)^\pi \\ = \pi c_e P_{\sigma_i H} (c_e P_{\sigma_i H} u)^\pi \left(\because \sum_{\sigma_j H \in I} \sum_{\substack{p \in G \\ p\sigma_i H = \sigma_j H}} r_p = r \right) \\ = rP_{\sigma_i H} (c_e P_{\sigma_i H} u)^\pi$$

故 $rP_{\sigma_i H}\lambda(u) = \lambda(rP_{\sigma_i H}u)$, 对 $\forall u \in U$,
 $\forall rP_{\sigma_i H} \in R \# G/H$ 。因此 V 是 U 的 $R \# G/H$ -直和项。

推论 2.8 设 R 是具有 F -单位元的 G -分次环, U 是一个单式 $R \# G/H$ -模, V 是 U 的一个 $R \# G/H$ -子模, 则 V 是 U 的 R -模直和项的充要条件是 V 作为 $R \# G/H$ -模是 U 的 $R \# G/H$ -直和项。

证明: 必要性, 由定理 2.7 可得。充分性, 由定理 2.3 可得。

定理 2.9 设 R 是具有 F -单位元的 G -分次环, K, H 是 G 的子群, 且 $K \subseteq H$, U 是一个单式 $R \# G/H$ -模, V 是 U 的一个 $R \# G/H$ -子模, 若 V 作为一个 H/K -分次 $R \# G/H$ -模是 U 的一个直和项, 则 V 作为 $R \# G/H$ 也是 U 的 $R \# G/H$ -的直和项。

证明: 由推论 2.6 若 H 是 G 的子群, 则 $R\text{-gr} \cong R \# G/H\text{-gr}$ 。若 K 也是 G 的子群, 同样有 $R\text{-gr} \cong R \# G/K\text{-gr}$, 所以 $R \# G/K\text{-gr} \cong R \# G/H\text{-gr}$ 。再由定理 2.3 $R \# G/H\text{-mod} \cong (G/H, R)\text{-gr}$, 所

以 $(G/H, R)\text{-gr} \cong (G/K, R)\text{-gr}$ 。又由引理 2.4 $(H/K, R \# G/H)\text{-gr} \cong (G/K, R)\text{-gr}$, 所以 $(H/K, R \# G/H)\text{-gr} \cong (G/H, R)\text{-gr}$ $R \# G/H\text{-mod}$ 。又由 V 作为 U 的一个 H/K -分次 $R \# G/H$ -子模的直和项, 因而 V 也是 $R \# G/H$ -模 U 的 $R \# G/H$ -的直和项。

推论 2.10 设 R 是具有 F -单位元的 G -分次环, K, H 是 G 的子群, 且 $K \subseteq H$, U 是一个单式 $R \# G/H$ -模, V 是 U 的一个 $R \# G/H$ -子模, 若 V 作为一个 H/K -分次 $R \# G/H$ -模是 U 的一个直和项的充要条件是 V 作为 $R \# G/H$ 也是 U 的 $R \# G/H$ -的直和项。

证明: 由推论 2.7 可得 V 作为一个 H/K -分次 $R \# G/H$ -模是 U 的一个直和项的充要条件是 V 作为 $R \# G/H$ 也是 U 的 $R \# G/H \# H/K (\cong R \# G/K)\text{-}$ 的直和项。再类似定理 2.9 的证明可得 $R \# G/K\text{-mod} \cong R \# G/H\text{-mod}$ 。所以 V 作为一个 H/K -分次 $R \# G/H$ -模是 U 的一个直和项的充要条件是 V 作为 $R \# G/H$ 也是 U 的 $R \# G/H$ -的直和项。

参考文献:

[1] 孙建华. 一个与 G -分次环和 G -集的 Smash 积有关的 Maschke-Type 定理[J]. 数学杂志, 1996, 16(2): 233—238.
[2] Cohen M, Montgomery, S. Group-graded rings, smash products and group actions[J]. T. A. M. S., 1984, 282(1): 237—258.
[3] 刘绍学. G -分次环与 G -集的 Smash 积[J]. 数学学报, 1993, 36(2): 199—206.
[4] Nastasescu C, Raianu S, Oystaeyen F Van. Modules graded by G -set[J]. Math. Z., 1990, 203(4): 605—627.
[5] Nastasescu C, Oystaeyen F Van. Graded Ring Theory[J]. Math Library, 1982, 28: 207-211.

Maschke-Type Theorems of Rings with F -units

ZHANG Ling-ping

(Chuzhou Campus, Huaiyin Teachers College, Jiangsu Huaian 223200, China)

Abstract: The reference 1 had discussed the smash product about the ring R with local units and G -graded A for any transitive G -set A , which has proved the Maschke-type theorem. In this paper, the author extend the Maschke-type to the G -graded ring R with F -units.

Keywords: smash product; local units; F -units