

一类向量组的有趣性质及其应用*

周琦¹, 王成刚²

(1. 盐城工学院 基础教学部, 江苏 盐城 224003; 2. 江苏省盐城中学, 江苏 盐城 224001)

摘 要: 给出了一类向量组, 讨论了此类向量组的一些有趣的性质, 阐述并举例其在证明线性空间的有限覆盖问题中的重要应用。

关键词: 向量组; 线性相关; 线性无关

中图分类号: O13 **文献标识码:** A **文章编号:** 1671-5322(2005)03-0017-02

在 n 维向量空间中, 有下列一些重要结果:

引理 1 在 n 维向量空间 R^n 中, 任意 $n+1$ 个向量组成的向量组必线性相关。

引理 2 一个向量组的部分组线性相关, 则该向量组必线性相关。

引理 3 n 维向量空间 R^n 中的 n 个向量线性相关的充要条件是这 n 个向量所组成的 n 阶方阵的行列式的值等于零^[1]。

引理 4 范德蒙行列式

$$D(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

等于零的充要条件是 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 中至少有两个值是相等的^[2]。

引理 5 一向量组与其在一组基下的坐标所组成的向量组具有相同的线性相关性。

引理 6 在向量空间中, 若一向量组线性无关, 则向量组中的向量在同时添上一些分量后所得的新向量组必线性无关; 若一向量组线性相关, 则它们同时去掉一些分量后所得的新向量组必仍线性相关。

引理 7 一向量组若线性无关, 则其任一非空部分组必线性无关; 若一向量组的某一非空部分组线性相关, 则该向量组必线性相关。

在 n 维向量空间 R^n 中, 设

$$\text{向量组 I: } \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ k \\ k^2 \\ \vdots \\ k^{n-1} \end{pmatrix} \mid k \in Z \right\},$$

$$\text{向量组 II: } \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ k \\ k^2 \\ \vdots \\ k^{n-1} \end{pmatrix} \mid k \in R \right\}, \text{ 则向量组 I 为含无}$$

穷多个向量的可数向量组, 向量组 II 为含无穷多个向量的不可数向量组。

则我们有下列结论成立:

定理 1 向量组 I、II 中任意向量个数小于等于 n 的向量组必线性无关。

证明 仅需对向量组 II 中向量个数小于或等于 n 的向量组进行证明即可。

任取向量组 II 中的 s 个向量 ($s \leq n$), 再取该 s 个向量的前 s 个分量组成新的向量组, 则对由这含 s 个分量的 s 个向量组成的矩阵的行列式, 由引理 4 知, 它一定不等于 0, 从而由引理 3 知它们必线性无关, 再由引理 6 知原任取的 s 个向量组 II 中的向量必线性无关^[3]。

由引理 1 显然有:

定理 2 向量组 I、II 中任意向量个数大于 n 的向量组必线性相关。

定理 3 向量组 I、II 中任意 n 个向量必组成 R^n 的一组基。

* 收稿日期: 2005-06-21

作者简介: 周琦 (1964—), 女, 江苏东台市人, 盐城工学院讲师。

定理 4 R^n 的任一真子空间至多含向量组Ⅱ中的 $n-1$ 个向量。

证明 若 R^n 中的一真子空间 V 中含有多于 $n-1$ 个向量组Ⅱ中的向量,则 V 必含有Ⅱ中 n 个向量,由定理 3 这 n 个向量必线性无关且组成 V 的一组基,从而 V 与 R^n 含有相同的基,从而 $V=R^n$,此与 V 为 R^n 的真子空间矛盾,故定理得证。

定理 5 R^n 不能被它的有限个真子空间所覆盖。

证明 设 $V_1, V_2, \dots, V_s$ 为 R^n 的 s 个真子空间,由定理 4,它们各至多含向量组Ⅱ中的 $n-1$ 个向量,即 $V_1, V_2, \dots, V_s$ 至多覆盖向量组Ⅱ中的 $(n-1) \times s$ 个向量,即向量组Ⅱ不能被 $V_1, V_2, \dots, V_s$ 这 s 个真子空间所覆盖,从而 R^n 不能被它的有限个真子空间所覆盖。

上述结论对一般数域 P 上的 n 维向量空间 P^n 亦成立。

设向量组Ⅲ: $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ a^2 \\ \vdots \\ a^{n-1} \end{pmatrix} \mid a \in P \right\}$, 则有:

定理 6 向量组Ⅲ中任意向量个数小于等于 n 的向量组必线性无关。

定理 7 向量组Ⅲ中任意向量个数大于 n 的向量组必线性相关。

定理 8 向量组Ⅲ中任意 n 个向量均组成 P^n 的一组基。

参考文献:

[1] 北京大学数学系几何与代数教研室代数小组. 高等代数(第 2 版)[M]. 北京:高等教育出版社,1988.
[2] 姚慕. 高等代数学[M]. 上海:复旦大学出版社,2000.
[3] 王正文. 高等代数分析与研究[M]. 济南:山东大学出版社,1994.

Interesting Properties of Vectors and Their Application

ZHOU Qi¹, WANG Cheng-gang²

(1. Department of Basic Sciences, Yancheng Institute of Technology, Jiangsu Yancheng 224003, China)
(2. Yancheng Middle School, Jiangsu Yancheng 224001, China)

Abstract: This paper addresses the interesting properties of one given type of vectors and discusses their application with examples in linear space.
Keywords: vectors; linear dependence; linear independence

定理 9 P^n 中的任一真子空间至多含向量组Ⅲ中的 $n-1$ 个向量。

定理 10 P^n 不能被它的有限个真子空间所覆盖。

上述结果可推广到一般的维线性空间 V 上。

定理 11 设 V 为数域 P 上的 n 维线性空间,则 V 不能被它的有限个真子空间所覆盖。

证明 取 V 的一组基,设为 $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n$,在此组基下,以向量组Ⅲ中的向量为坐标所对应的向量组设为向量组Ⅳ: $\{\alpha_a \mid a \in P\}$

即 α_a 在基 $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n$ 下的坐标为 $\begin{pmatrix} 1 \\ a \\ a^2 \\ \vdots \\ a^{n-1} \end{pmatrix}$ 。

由引理 5 及定理 4、5,则 V 的任一真子空间至多含向量组Ⅳ中的 $n-1$ 个向量,故 V 的有限个真子空间至多覆盖向量组Ⅳ中的有限个向量(s 个真子空间至多覆盖 $(n-1) \times s$ 个向量组Ⅳ中的向量)。即 V 不能被它的有限个真子空间所覆盖。

此定理的证明与传统的证明方法相比要简单明了得多,由此亦可看出此类向量组在向量空间中有着非常重要的应用。

事实上我们由引理 7 还可以得到此向量集中任一个或任两个向量组成的向量组也必线性无关,而任四个及四个以上向量组成的向量组必线性相关。