第 18 卷 第 4 期 盐城工学院学报(自然科学版) Vol. 18 No. 4
2005 年 12 月 Journal of Yancheng Institute of Technology(Natural Science) Dec. 2005

自由振动法测量材料杨氏模量*

程 鲲
(盐城工学院 实验教学部,江苏 盐城 224003)

摘 要:根据振动理论,给出了悬臂梁自由振动的周期与材料杨氏模量的关系,并设计了一种测量材料杨氏模量的实验装置,该装置的测量精度比传统的静态拉伸法高一个数量级。

关键词:杨氏模量;固有频率;弯曲振动;自由振动
中图分类号:G642.423 **文献标识码**:A **文章编号**:1671-5322(2005)04-0047-03

测量弹性系统的振动固有频率一般采用共振法,本文讨论自由振动法,并以自由振动法为基础,设计一种测量材料杨氏模量的实验装置。

1 自由振动法测量杨氏模量的原理

任何弹性系统在作自由振动时,系统振动的固有频率与系统的内在属性直接相关,这些属性包括系统结构、系统材料、系统振动模态等,下面以梁的弯曲自由振动加以说明。

1.1 弯曲自由振动的运动微分方程[1]

研究均质细长等截面直梁的平面弯曲振动,由于是细长直梁,则梁的运动可用梁轴线上各点的位移表示。梁的 l、ρ、I、E 均为常数,其中 l 为梁的长度,ρ 为梁长度方位的线密度,I 为梁横截面对弯曲中性轴的惯性矩,E 为梁材料的杨氏模量。梁的弯曲振动如图 1 所示,利用微分方法,将梁分为若干个微元,相邻微元之间的相互作用力如图 2 所示,即梁的弯矩 M、剪力 Q,而 M、Q 是 x 的函数,即 $M=M(x)$,$Q=Q(x)$,它们与梁轴线的弯曲挠曲线方程 $y=y(x)$ 有直接关系:

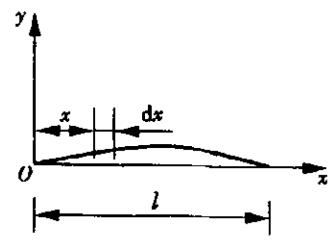

图 1 梁的弯曲振动
Fig. 1 Beam's bending vibration

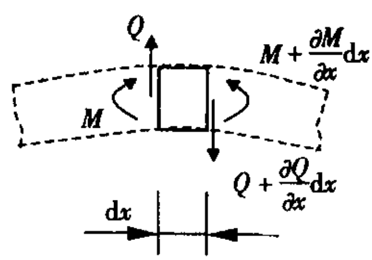

图 2 梁微元的受力
Fig. 2 Beam's internal force

$$M = EI\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \tag{1}$$

$$Q = \frac{\partial M}{\partial x} \tag{2}$$

将(1)、(2)两式代入梁作自由振动时微元沿 y 方位的运动微分方程:

$$\rho \mathrm{d}x = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = Q - \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\mathrm{d}x + Q\right) \tag{3}$$

得:

$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \frac{\rho}{EI}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \tag{4}$$

令 $\frac{EI}{\rho} = a^2$,则(4)式表示为:

$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \frac{1}{a^2}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \tag{5}$$

* 收稿日期:2005-08-11

作者简介:程 鲲(1976-),男,贵州安顺市人,盐城工学院助教。

1.2 弯曲自由振动的固有频率与振型[1]

运用分离变量法,假定四阶偏微分方程(5)的解有如下形式:

$$y(x,t) = A(x)B(t) \tag{6}$$

将(6)式代入方程(5),得:

$$\frac{1}{B}\cdot\frac{\mathrm{d}^2B}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{a^2}{A}\cdot\frac{\mathrm{d}^4A}{\mathrm{d}x^4} \tag{7}$$

(7)式左端、右端分别仅依赖于变量 t 与 x,要使该式成立,该式的左右端应等于同一常数,设此常数为 $-\omega^2$,且令 $\beta^2 = \frac{\omega}{a}$,则有:

$$\frac{\mathrm{d}^2B}{\mathrm{d}t^2} + \omega^2 B = 0 \tag{8}$$

$$\frac{\mathrm{d}^4A}{\mathrm{d}x^4} - \beta^4 A = 0 \tag{9}$$

由方程(8)的形式可知:ω 即是方程(8)所反映的弯曲自由振动系统的固有角频率。由微分方程理论,方程(9)的通解可表示为:

$$A(x) = c_1\mathrm{ch}\beta x + c_2\mathrm{sh}\beta x + c_3\cos\beta x + c_4\sin\beta x \tag{10}$$

式(10)称为弯曲自由振动系统的振型函数,β 为振型函数的特征值,β 值决定固有角频率;c_1、c_2、c_3、c_4 为与 β 相对应的系数,各系数间的相对比值决定振型函数的函数图形状,即振型。由系统的边界条件,可确定 β 与 $A(x)$。对均质等截面细长直悬臂梁,其固定端边界条件可表示为:

$$A(0) = A'(0) = 0 \tag{11}$$

自由端边界条件可表示为:

$$A''(l) = A'''(l) = 0 \tag{12}$$

由边界条件(11)、(12)得:

$$\left.\begin{aligned} c_1 &= -c_3 \\ c_2 &= -c_4 \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

$$\left.\begin{aligned} (\mathrm{ch}\beta l + \cos\beta l)c_1 + (\mathrm{sh}\beta l + \sin\beta l)c_2 &= 0 \\ (\mathrm{sh}\beta l - \sin\beta l)c_1 + (\mathrm{ch}\beta l + \cos\beta l)c_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

若将 c_1、c_2 看着未知量,方程组(14)有非零解的条件为:

$$\cos\beta l\ \mathrm{ch}\beta l = -1 \tag{15}$$

用数值解法中的二分法解得式(15)的一阶特征根 $\beta_1 l = 1.875\ 104$,从而得:

$$\omega_1 = \beta_1^2\cdot a = \frac{1.875\ 104^2}{l^2}\cdot\sqrt{\frac{EI}{\rho}} \tag{16}$$

将一阶特征根 $\beta_1 l$ 代入式(14),可得系数 c_2 与 c_1 及 c_3 与 c_4 的一阶比值:

$$\left(\frac{c_2}{c_1}\right)_1 = \left(\frac{c_4}{c_3}\right)_1 = -\frac{\mathrm{sh}\beta_1 l + \sin\beta_1 l}{\mathrm{ch}\beta_1 l + \cos\beta_1 l} \tag{17}$$

对振型而言,若取 $c_1 = 1$,则系统的一阶固有振型函数可取为:

$$A_1(x) = \mathrm{ch}\beta_1 x - \cos\beta_1 x - \frac{\mathrm{sh}\beta_1 l - \sin\beta_1 l}{\mathrm{ch}\beta_1 l + \cos\beta_1 l}(\mathrm{sh}\beta_1 x - \sin\beta_1 x) \tag{18}$$

类似地,可求出悬臂梁自由振动系统的二阶、三阶固有角频率 ω_2、ω_3 与固有振型函数 $A_2(x)$、$A_3(x)$。悬臂梁自由振动系统的前三阶固有振型示意图如图 3 所示。

1.3 杨氏模量与振动周期的关系

讨论图 4 均质等截面细长直悬臂梁在小阻尼下的衰减自由振动。初始时施加力 F,使自由端偏离平衡位置 y_0,则梁的初始挠曲线为三次抛物线,撤去 F,梁将作自由振动。初始挠曲线接近一阶振型曲线,所以自由振动中主要为一阶固有振型,而一阶固有振型的衰减速度最慢,经过一段时间的衰减后,自由振动就很接近一阶固有振型,又因阻尼较小,则认为实际的振动角频率为一阶固有角频率[3,4]。

若测出衰减自由振动后期的振动周期 T,T

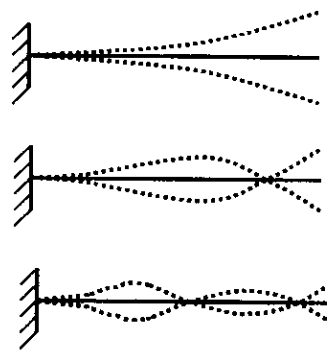

图 3 梁的前三阶固有振型

Fig. 3 The first three order vibration mode

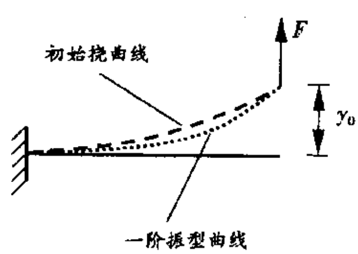

图 4 振动的初始状态

Fig. 4 The beginning of vibration

即近似为悬臂梁的一阶固有周期 T_1,$T_1 = \frac{1}{f_1} = \frac{2\pi}{\omega_1}$,得悬臂梁材料的杨氏模量:

$$E = \frac{4\pi^2 l^4 \rho}{1.875104^4 IT^2} \tag{19}$$

2　实验装置的设计

如图 5，将一根均质细长圆截面直钢丝铅垂放置，上端用夹头紧固于台座上，下端设置一细光束光电门。钢丝静止时，仔细调节钢丝与光电门，使钢丝恰好遮住光束。经测试，钢丝振动的阻尼≪0.1，可不考虑阻尼对振动周期的影响。在一个振动周期内，钢丝会遮断光束 2 次，光电门产生的脉冲信号接入 TH—4 型毫秒计，可将毫秒计设置为：对两个脉冲信号记录一次计数及时刻，则相邻计数的时刻之差即为钢丝的振动周期。实测

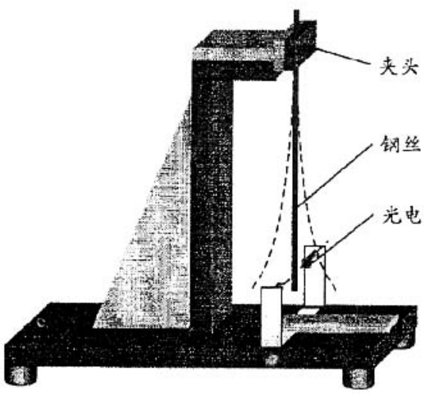

图 5　实验部分装置

Fig. 5　Diagram of laboratory equipment

中，使钢丝初始时作近似于一阶振型的自由振动，控制毫秒计，记录振动后期的若干个记数及对应的时刻，选择其中连续的十个数据计算振动周期。

3　测量数据及处理结果

3.1　钢丝实验常数

选择合适的量具对钢丝进行多次测量，取平均值得钢丝的实验常数：悬臂长度 l = 0.1518（m）；线密度 ρ = 0.003209（kg/m）；直径 d = 0.721（mm）

3.2　毫秒计记录

在后期的振动中，所选择的连续 10 个计数 i 所对应的时刻 t_i 如表 1 所示。

表 1　毫秒计记录

Tab. 1　data of measurement

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
t_i(s)	0.5174	0.5625	0.6075	0.6526	0.6976	0.7427	0.7877	0.8327	0.8778	0.9229

3.3　钢丝振动周期 T

由表 1 中的数据得：

$$T = \frac{\sum_{i=1}^{9}(t_{i+1} - t_i)}{9} = 0.045056(\mathrm{s})$$

3.4　钢丝杨氏模量 E

由(19)式得：

$$E = \frac{4\pi^2 \times 0.1518^4 \times 0.003209}{1.875104^4 \times \frac{\pi \times 0.000721^4}{64} \times 0.045056^2}$$

$$= 2.0207 \times 10^{11}(\mathrm{N/m^2})$$

4　结论

以自由振动法为基础，用悬臂梁为振动体的实验装置所测钢丝的杨氏模量与钢的标准值 $2.0 \times 10^{11}\,\mathrm{N/m^2}$ 相差很小，对同一根钢丝测量多次的结果相互间也很接近。说明该实验装置具有较高的准确性。该装置的测量原理可靠，仪器设备简单，从影响测量结果的因素分析，如果将钢丝质量、振动时间的测量精度提高，可进一步提高实验装置的测量准确性。

参考文献：

[1] 方同，薛璞. 振动理论及应用[M]. 西安：西北工业大学出版社，1998.
[2] 吴大方，刘安成. 压电智能柔性梁振动主动控制研究[J]. 北京航空航天大学学报，2004，30(2)：160－163.

Measurement on Young's Modulus by Means of Free Vibration

CHENG Kun
(Department of Experiment Teaching, Yancheng Institute of Technology, Jiangsu Yancheng　224003, China)

Abstract: In this paper, the relation of cantilever beam's free vibration period and Young's modulus of materials are introduced, the laboratory equipment of measuring Young's modulus is designed, the precision of the laboratory equipment is one order of magnitude higher than traditional static stretched method.

Keywords: Young's modulus; natural frequency; bending vibration; free vibration