

对流占优扩散方程的一种基于斜线性插值的特征差分算法^{*}

黄素珍

(盐城工学院 基础教学部,江苏 盐城 224003)

摘 要:将特征线法和有限差分法相结合,借助于斜线性插值,给出了求解对流占优扩散方程数值解的一种新的特征差分格式,并研究了算法的收敛性。该算法的优点是特别适用于求解变系数的对流占优扩散方程,能更有效地消除数值振荡现象。

关键词:对流占优扩散方程;特征线差分法;斜线性插值;收敛性

中图分类号:0241.8 **文献标识码:**A **文章编号:**1671-5322(2006)02-0056-06

在物理和力学问题中出现的各种对流扩散过程中,有许多对流相对于扩散来说起主导作用。这些过程呈现出几乎双曲的性质。对流占优性给问题的数值求解带来了许多困难。因此,对流占优问题的有效数值解法一直是计算数学中重要的研究内容。为了克服数值振荡,20世纪80年代,Douglas和Russel^[1]提出了求解对流占优扩散问题的特征有限元法和特征有限差分法。由于这一方法突出的优越性,人们在十几年的时间里对该方法进行了进一步的研究和应用^[2-9]。在用特征有限差分法求解对流占优扩散问题时都要利用代数插值进行计算,在文献[1]中采用了图1所示的方法:用 (x_{j-1}, t_{n-1}) 、 (x_j, t_{n-1}) 两点的值对 Q 进行线性插值;边界按图2的方法处理:用 P_0 、 Q_0 两点的值对 Q 进行插值。但

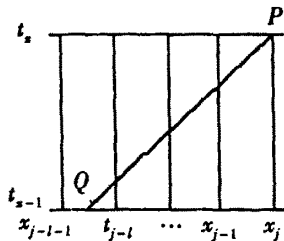


图1 网格划分示意图

Fig.1 Grids by demarcating

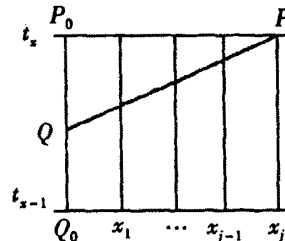


图2 边界结构

Fig.2 Boundary structure

是对于有些问题的计算依然会出现数值振荡现象,这是因为当分割区间的步长不相同,特征线与第 $n-1$ 层网线的交点有可能会远离节点 (x_j, t_{n-1}) (见图1),这时选择两节点 (x_{j-1}, t_{n-1}) 、 (x_j, t_{n-1}) 做线性插值就会影响到计算精度,因而出现数值振荡。秦新强^[10]采用了图3所示的方法:用 (x_{j-1}, t_{n-1}) 、 (x_j, t_{n-1}) 、 (x_{j-1}, t_n) 、 (x_j, t_n) 四点的值对 P 进行双线性插值。本文只用图4中 (x_j, t_{n-1}) 、 (x_{j-1}, t_n) 两点的值对 P 进行斜线性插值构造了一种新的特征差分算法,该方法与文献[1]的方法相比更加稳定,比文献[10]的方法要简单,还特别适用于求解变系数的对流占优扩散方程。

* 收稿日期:2006-01-10

作者简介:黄素珍(1975-),女,江苏大丰市人,盐城工学院讲师,硕士。

$$\left[\frac{\partial}{\partial x} (a(x) \frac{\partial u}{\partial x}) \right]_j^n = \delta_x^2 [u(x_j, t_n)] - \bar{r}_j^n, \quad (5)$$

其中 $\bar{r}_j^n$ 为二阶中心差商的局部截断误差。这样由(4)、(5)式便得

$$\frac{c_j h + b_j \tau}{h} \frac{u(x_j, t_n) - u(x_*, t_*)}{\tau} - \delta_x^2 [u(x_j, t_n)] = f_j^n - R_j^n, \quad (6)$$

其中

$$R_j^n = r_j^n + \bar{r}_j^n, \quad (7)$$

$$r_j^n = \left(\phi \frac{\partial u}{\partial \lambda} \right)_j^n - \frac{c_j h + b_j \tau}{h} \frac{u(x_j, t_n) - u(x_*, t_*)}{\tau}, \quad (8)$$

$$\bar{r}_j^n = \left[\frac{\partial}{\partial x} (a(x) \frac{\partial u}{\partial x}) \right]_j^n - \delta_x^2 [u(x_j, t_n)], \quad (9)$$

略去(6)式中的 R_j^n , 则得到求解初边值问题系(1)的特征差分格式

$$\begin{cases} \frac{c_j h + b_j \tau}{h} \frac{U_j^n - U_*^n}{\tau} - \delta_x^2 [U_j^n] = f_j^n, \\ U_j^0 = u_0(x_j), U_0^n = g_0(t_n), U_M^n = g_2(t_n), \\ j = 0, 1, 2, \dots, M, n = 1, 2, \dots, N. \end{cases} \quad (10)$$

其中 U_j^n 为 $u(x_j, t_n)$ 的数值解。

2 斜线性插值

格式(10)中的 U_*^n 由 Q_0, P_{-1} 这两点的值通过斜线性插值得到, 令 $U_*^n = w(x_*, t_*)$, 其中 $w(x, t) = I_1 \{U_{j-1}^n, U_j^{n-1}\}(x, t)$ 表示用插值数据 $\{U_{j-1}^n, U_j^{n-1}\}$ 求得的线性插值函数。其中 I_1 为线性插值算子。其结果如下:

$$I_1 \{U_{j-1}^n, U_j^{n-1}\}(x_*, t_*) = \frac{|Q_0 P_*|}{|P_{-1} Q_0|} U_{P_{-1}} + \frac{|P_{-1} P_*|}{|P_{-1} Q_0|} U_{Q_0}, \quad (11)$$

其中

$$\frac{|Q_0 P_*|}{|P_{-1} Q_0|} = \frac{|Q_0 Q_*|}{|Q_0 P_0|} = \frac{b_j \tau}{c_j h + b_j \tau}, \quad (12)$$

$$\frac{|P_{-1} P_*|}{|P_{-1} Q_0|} = 1 - \frac{|Q_0 P_*|}{|P_{-1} Q_0|} = \frac{c_j h}{c_j h + b_j \tau}, \quad (13)$$

将(12)、(13)式代入(11)式, 得

$$I_1 \{U_{j-1}^n, U_j^{n-1}\}(x_*, t_*) = \frac{b_j \tau}{c_j h + b_j \tau} U_{P_{-1}} + \frac{c_j h}{c_j h + b_j \tau} U_{Q_0}, \quad (14)$$

亦即

$$U_*^n = \frac{b_j \tau}{c_j h + b_j \tau} U_{j-1}^n + \frac{c_j h}{c_j h + b_j \tau} U_j^{n-1} \quad (15)$$

将(15)代入(10)式便可得到具体的数值计算格式。

3 收敛性分析

对于固定的 n 和 j , 定义光滑函数 $u^n(x)$ 和 $u_j(t)$ 的如下范数:

$$\|u^n\|_\infty = \max_x |u(x, t_n)|, \quad \|u^n\|_{m,\infty} = \|u^n\|_\infty + \sum_{i=1}^m \left\| \frac{\partial^i u^n}{\partial x^i} \right\|_\infty,$$

$$\|u_j\|_{\infty} = \max_i |u(x_j, t)|, \quad \|u_j\|_{\infty, \infty} = \|u_j\|_{\infty} + \sum_{i=1}^m \left\| \frac{\partial u}{\partial x^i} \right\|_{\infty}.$$

文献[1]已经证明二阶中心差商的局部截断误差满足:

$$|\bar{r}_j^n| \leq \begin{cases} k \|u^n\|_{3, \infty} h, & \text{如果 } u^n \in W^{3, \infty}(R), \\ k \|u^n\|_{4, \infty} h^2, & \text{如果 } u^n \in W^{4, \infty}(R). \end{cases} \quad (16)$$

其中 k 为常数。利用带积分余项的 Taylor 公式可计算出

$$r_j^n = \left(\phi \frac{\partial u}{\partial \lambda} \right)_j^n - \frac{c_j h + b_j \tau}{h} \frac{u(x_j, t_n) - u(x_*, t_*)}{\tau} = \frac{\phi_j^2 h \tau}{2(c_j h + b_j \tau)} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \lambda^2} \right)_j^n, \quad (17)$$

这里 $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \lambda^2} \right)_j^n$ 是 u 沿线段 $P_0 P$ 的二阶切向导数在 $P_0 P$ 上某点的值, 结合(7), (16)及(17)式, 便有

$$|R_j^n| \leq \begin{cases} k_1 \left[\left\| \frac{\partial^2 u}{\partial \lambda^2} \right\|_{\infty} \tau + \|u^n\|_{3, \infty} h \right], & \text{当 } u^n \in W^{3, \infty}(R) \text{ 时}, \\ k_1 \left[\left\| \frac{\partial^2 u}{\partial \lambda^2} \right\|_{\infty} \tau + \|u^n\|_{4, \infty} h^2 \right], & \text{当 } u^n \in W^{4, \infty}(R) \text{ 时}, \end{cases} \quad (18)$$

其中 k_1 为正常数, $\left\| \frac{\partial^2 u}{\partial \lambda^2} \right\|_{\infty} = \max_{[0, L] \times [0, T]} \left| \frac{\partial^2 u}{\partial \lambda^2} \right|$.

令 $e_j^n = u(x_j, t_n) - U_j^n$, 则由(6)与(10)式得到误差函数所满足的方程

$$\begin{cases} \frac{c_j h + b_j \tau}{h} \frac{e_j^n - e_j^{n-1}}{\tau} - \delta_x^2 [e_j^n] = -R_j^n, \\ e_j^0 = 0, \end{cases} \quad (19)$$

其中 $e_j^n = u(x_*, t_n) - w(x_*, t_n)$, 这样由(19)式可以得到:

$$e_j^n - \frac{\tau h}{c_j h + b_j \tau} [a_{j+1/2} e_{j+1}^n - (a_{j+1/2} + a_{j-1/2}) e_j^n + a_{j-1/2} e_{j-1}^n] = e_j^n - \frac{h}{c_j h + b_j \tau} R_j^n \tau.$$

对于已固定的 n , 设 $e_{j_0}^n = \max_j |e_j^n| > 0$ 则在 $j = j_0$ 处 $a_{j+1/2} e_{j+1}^n - (a_{j+1/2} + a_{j-1/2}) e_j^n + a_{j-1/2} e_{j-1}^n \leq 0$, 于是推知 $0 <$

$e_{j_0}^n \leq e_{j_0}^n - \frac{h}{c_j h + b_j \tau} R_{j_0}^n \tau$, 进而得到 $e_{j_0}^n = \max_j |e_j^n| \leq |e_{j_0}^n| + \tau |R_{j_0}^n|$, 从而有:

$$\max_j |e_j^n| \leq \max_j |e_j^{n-1}| + M_1 \max_j |R_j^n| \tau, \quad (20)$$

此处 M_1 为正的常数。下面讨论如何用 $\max_j |e_j^{n-1}|$ 来估计 $\max_j |e_j^n|$, 进而由式(20)导出 $\max_j |e_j^{n-1}|$ 与 $\max_j |e_j^n|$ 之间的递推关系式。由于:

$$\begin{aligned} e_j^n &= u(x_*, t_n) - w(x_*, t_n) = u(x_*, t_n) - I_1 \{U_{j-1}^n, U_j^{n-1}\}(x_*, t_n) = u(x_*, t_n) - I_1 \{u(x_{j-1}, t_n), \\ &u(x_j, t_{n-1})\}(x_*, t_n) + I_1 \{u(x_{j-1}, t_n), u(x_{j-1}, t_n)\}(x_*, t_n) - I_1 \{U_{j-1}^n, U_j^{n-1}\}(x_*, t_n) = \bar{r}_j^n + I_1 \{e_{j-1}^{n-1}, \\ &e_j^{n-1}\}(x_*, t_n), \end{aligned} \quad (21)$$

式中 $\bar{r}_j^n = u(x_*, t_n) - I_1 \{u(x_{j-1}, t_n), u(x_j, t_{n-1})\}(x_*, t_n)$, 由(15)式及(21)式可得到:

$$\max_j |e_j^n| \leq \max_j |\bar{r}_j^n| + \frac{c_j h}{c_j h + b_j \tau} \max_j |e_j^{n-1}| + \frac{b_j \tau}{c_j h + b_j \tau} \max_j |e_j^n|. \quad (22)$$

将(22)式代入(20)式得到

$$\max_j |e_j^n| \leq \max_j |e_j^{n-1}| + \frac{c_j h + b_j \tau}{h} \max_j |\bar{r}_j^n| + M_1 \max_j |R_j^n| \tau, \quad (23)$$

这里还需估计斜线性插值误差 $\bar{r}_j^n$,

$$\begin{aligned} |\bar{r}_j^n| &= |u(x_*, t_n) - I_1 \{u(x_{j-1}, t_n), u(x_j, t_{n-1})\}(x_*, t_n)| = \\ &\frac{1}{2} \left| \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} \right)_j \right| P_{-1} P_* \|P_* Q_0\| = \frac{1}{2} \frac{b_j \tau h (h^2 + \tau^2)}{(c_j h + b_j \tau)^2} \left| \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} \right|_j^n, \end{aligned} \quad (24)$$

其中 ρ 表示直线 $P_{-1} Q_0$ 的方向, $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} \right)_j^n$ 表示沿线段 $P_{-1} Q_0$ 的二阶切向导数在 $P_{-1} Q_0$ 上某点的值。

则当 $h = o(\tau)$ 时, 由 (24) 式可估计出

$$\max_j |\bar{r}_j^n| \leq M_2 \max_{[x_{j-1}, x_j] \times [t_{n-1}, t_n]} \left| \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} \right| h \tau, \quad (25)$$

式中 M_2 为正的常数。将 (25) 式代入 (23) 式得

$$\begin{aligned} \max_j |e_j^n| &\leq \max_j |e_j^{n-1}| + \frac{c_j h + b_j \tau}{h} M_2 \max_{[x_{j-1}, x_j] \times [t_{n-1}, t_n]} \left| \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} \right| h \tau + M_1 \max_j |R_j^n| \tau = \\ &\max_j |e_j^{n-1}| + M_3 \tau \left[\max_{[x_{j-1}, x_j] \times [t_{n-1}, t_n]} \left| \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} \right| (c_j h + b_j \tau) + \max_j |R_j^n| \right]. \end{aligned} \quad (26)$$

令 $Q_n = \max_{[x_{j-1}, x_j] \times [t_{n-1}, t_n]} \left| \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} \right| (c_j h + b_j \tau) + \max_j |R_j^n|$ 。注意到 $e_j^0 = 0$, 则由式 (26) 可得递推式

$$\begin{aligned} \max_j |e_j^n| &\leq \max_j |e_j^{n-1}| + M_3 \tau Q_n \leq \max_j |e_j^{n-2}| + M_3 \tau (Q_n + Q_{n-1}) \leq \\ &\cdots \leq M_3 \tau \sum_{m=1}^n Q_m \leq M_4 \max_{1 \leq m \leq n} |Q_m|. \end{aligned} \quad (27)$$

将 Q_n 的表达式代入式 (27), 得到

$$\max_j |e_j^n| \leq M_4 \left[\max_{1 \leq m \leq n} |R_j^m| + \max_{[x_{j-1}, x_j] \times [0, T]} \left| \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} \right| (c_j h + b_j \tau) \right].$$

令 $\left\| \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} \right\|_{\infty} = \max_{[0, L] \times [0, T]} \left| \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} \right|$, 并由式 (18) 得到:

$$\max_{j,n} |e_j^n| \leq M \left[\left\| \frac{\partial^2 u}{\partial \lambda^2} \right\|_{\infty} \tau + \max_{0 \leq t \leq T} \|u(t)\|_{3,\infty} h + \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} \right\|_{\infty} (c_j h + b_j \tau) \right].$$

式中 M 为正的常数。由此可知, 基于斜线性插值的特征差分格式的整体误差为 $O(h + \tau)$ 。

以上讨论是基于 $b_j > 0$ 的情形; 当 $b_j < 0$ 时, 可类似进行讨论并得出相应的计算格式。

4 数值例子

考虑定解问题

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + k \frac{\partial u}{\partial x} = \varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & (0 < x < 1, 0 < t < T, \varepsilon > 0), \\ u(x, 0) = 0 & (0 < x < 1), \\ u(x, t) = 0, u(1, t) = 1 & (0 < t < T). \end{cases} \quad (28)$$

其精确解是^[1]

$$u(x, t) = \frac{e^{kx/\varepsilon} - 1}{e^{k/\varepsilon} - 1} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m m \pi}{(m \pi)^2 + \left(\frac{k}{2\varepsilon}\right)^2} e^{k(x-1)/2\varepsilon} \sin(m \pi x) e^{-[(m \pi)^2 \varepsilon + k^2/4\varepsilon]t} \quad (29)$$

我们分别采用基于本文的斜线性插值以及相应的双线性插值和文献 [1] 中的线性插值的特征差分算法, 取 $k=1.0, \varepsilon=0.01$, 在 $\tau=0.03, h=0.02$ 和 $\tau=0.05, h=0.02$ 两种情况下计算 $t=0.3$ 时的数值结果, 其结果见表 1。

表 1 一维对流扩散方程三种差分格式的计算误差比较

Table 1 Numerical errors of three finite difference schemes for one - dimensional convection - diffusion equation						
计算方法	振荡与否		平均绝对误差		最大绝对误差	
	$\tau=0.03$	$\tau=0.05$	$\tau=0.03$	$\tau=0.05$	$\tau=0.03$	$\tau=0.05$
I 线性插值特征差分格式	否	否	0.009 25	0.127 65	0.251	0.311
II 双线性插值特征差分格式	否	否	0.006 72	0.007 15	0.198	0.208
III 斜线性插值特征差分格式	否	否	0.006 68	0.006 62	0.197	0.196

数值试验结果表明:基于线性插值特征差分算法虽然没有数值振荡,但是计算精度不高,尤其当特征线与第 $n-1$ 层网线的交点远离节点 (x_j, t_{n-1}) 时选择两节点 (x_{j-l-1}, t_{n-1}) 、 (x_{j-l}, t_{n-1}) 做线性插值计算精度太低;基于双线性插值特征差分算法与前者相比数值扩散明显减少,计算精度明显提高。本文提出的基于斜线性插值特征差分算法是一种有效的算法,该方法与文献[1]的方法相比更加稳定,比文献[8]的方法要简单,而且比文献[8]的方法精度要高,还特别适用于求解变系数对流占优扩散方程。

参考文献:

- [1] Douglas J, Russell T F. Numerical methods for convection - dominated diffusion problem based on combining the method of characteristics with finite element or finite difference procedures [J]. SIAM J Numer Anal, 1982, 19(5): 871 - 885.
- [2] Evans D J, Abdullah A R. A New Explicit Method for the Diffusion - convection Equations [J]. Comp and Math with Appl, 1985, 11: 145 - 154.
- [3] Rigal A. Numerical analysis of two - level finite difference schemes for unsteady diffusion - convection problems [J]. Int J Numer Method Eng, 1989, 28(2): 1001 - 1021.
- [4] 陆金甫, 张宝琳, 徐涛. 求解对流扩散方程的交替分段显 - 隐式方法 [J]. 数值计算与计算机应用, 1998, 19(3): 161 - 167.
- [5] 张宝琳, 符鸿源. 一类交替块 Crank - Nicolson 方法的差分图 [J]. 科学通报, 1999, 40(11): 1148 - 1152.
- [6] 王文治. 求解扩散方程的一类交替分组显式方法 [J]. 山东大学学报, 2002, 37(3): 194 - 199.
- [7] 陆金甫, 杜正平, 刘晓遇. 对流占优扩散问题的一种特征差分方法 [J]. 清华大学学报: 自然科学版, 2002, 42(8): 35 - 37.
- [8] 黄素珍. 求解对流扩散方程的一类交替分组显式方法 [J]. 盐城工学院学报: 自然科学版, 2004, 17(1): 12 - 16.
- [9] 黄素珍, 张鲁明. 对流扩散方程的一种高精度特征差分格式 [J]. 南京师大学报: 自然科学版, 2005, 28(2): 38 - 41.
- [10] 秦新强, 李秋芳. 对流占优扩散方程一种新的特征差分算法 [J]. 高等学校计算数学学报, 2004, 19(1): 161 - 167.

Skew Linear Interpolation Characteristic Difference Method for Convection - dominated Diffusion Equation

HUANG Su - zhen

(Department of Fundamental Sciences, Yancheng Institute of Technology, Jiangsu Yancheng 224003, China)

Abstract: A new kind of characteristic - difference scheme for convection - dominated diffusion equations is constructed by combining characteristic method with the finite - difference method and with the skew linear interpolation method. The convergence of the characteristic - difference scheme is studied. The advantage of this scheme is very adaptable to obtain the solution of the equations with variable coefficient and can eliminate the numerical oscillations more efficiently.

Keywords: convection - diffusion equations; characteristic - difference scheme; skew linear interpolation; convergence