复亚正定矩阵的几个定理*

杨载朴
(盐城工学院 基础教学部,江苏 盐城 224003)

摘 要:讨论了复亚正定矩阵张量积的性质,并将实对称矩阵的 Schur 定理、华罗庚定理推广到较为广泛的复矩阵类。

关键词:复亚正定矩阵;张量积;Hadamard 乘积;Schur 定理
中图分类号:O151.21 **文献标识码**:A **文章编号**:1671-5322(2006)02-0062-03

1 复亚正定矩阵的基本性质

复亚正定矩阵是正定 Hermite 矩阵的推广,本文讨论了这一类未必共轭对称的复矩阵类的性质。在本文中,$C^{n\times n}$表示 $n\times n$ 复矩阵类,$\sigma(A)$表示 A 的谱,即 A 的特征值的集合。

设 $A\in C^{n\times n}$,记 $H(A)=\dfrac{A+\overline{A}^T}{2}$,$G(A)=\dfrac{A-\overline{A}^T}{2}$,则 $A=H(A)+G(A)$. 显然$\overline{H(A)}^T=H(A)$,$\overline{G(A)}^T=-G(A)$,$H(A)$与 $G(A)$分别称为 A 的 Hermite 分支与反 Hermite 分支。

定义 1 设 $A\in C^{n\times n}$,若对任意的$0\neq X\in C^{n\times 1}$,都有 $X^TH(A)\overline{X}>0$,则称 A 为复亚正定矩阵,简称复亚正定阵。

显然,A 为复亚正定阵$\Leftrightarrow H(A)$的特征值均为正。

引理 1[1] 设 D 为反 Hermite 矩阵,则对任何 $X=(x_1,x_2,\cdots x_n)^T\in C^{n\times 1}$,有 $Re(X^TD\overline{X})=0$。

引理 2[1] 设 $A\in C^{n\times n}$,则对$\forall X=(x_1,x_2,\cdots x_n)^T\in C^{n\times 1}$,$X^TA\overline{X}$的实部与虚部分别为:

$$Re(X^TA\overline{X}) = X^TH(A)\overline{X} \tag{1}$$

$$I_m(X^TA\overline{X}) = \frac{1}{i}X^TG(A)\overline{X} \tag{2}$$

引理 3[1] 设 $A\in C^{n\times n}$,则下列各点都是互为等价的。

(1)A 为复亚正定阵。

(2)$\forall 0\neq X\in C^{n\times 1}$,均有 $Re(X^TA\overline{X})>0$。

(3)A^T 为复亚正定阵。

(4)$\overline{A}^T$ 为复亚正定阵。

(5)A^{-1}为复亚正定阵。

(6)对任意非异复方阵 P,$P^TA\overline{P}$为复亚正定阵。

(7)对任意正实数 k,kA 为复亚正定阵。

(8)A 的任一主子矩阵为复亚正定阵。

(9)A 的任一顺序主子矩阵为复亚正定阵。

---

* 收稿日期:2006-02-23
作者简介:杨载朴(1945-),男,江苏建湖县人,盐城工学院教授,主要研究方向为矩阵论。

2 复亚正定阵张量积的性质

设 $A=(a_{jk})_{m\times m}$,$B=(b_{jk})_{n\times n}$ 均为复方阵,则

$$A\otimes B\equiv\begin{bmatrix}a_{11}B & \cdots\cdots & a_{1m}B\\ \cdots\cdots & & \\ a_{m1}B & \cdots\cdots & a_{mm}B\end{bmatrix}$$

称为 A 与 B 的张量积,亦称为 Kronecker 积。

引理4[3] $(A\otimes C)(B\otimes D)=AB\otimes CD$。

定理1 设 A 为 m 阶复亚正定阵,B 为 n 阶复亚正定阵,则 $A\otimes H(B)$、$H(A)\otimes B$ 均为复亚正定阵。

证:因 A 为复亚正定阵,故 $H(A)$ 为正定 Hermite 阵,故存在 m 阶非异复方阵 P,使 $P^TH(A)\overline{P}=I_m$,同理存在 n 阶非异复方阵 Q,使 $Q^TH(B)\overline{Q}=I_n$。

$$\begin{aligned}&(P\otimes Q)^T[A\otimes H(B)](\overline{P\otimes Q})=\\&(P\otimes Q)^T[(H(A)+G(A))\otimes H(B)](\overline{P}\otimes\overline{Q})=\\&(P^T\otimes Q^T)[H(A)\otimes H(B)+G(A)\otimes H(B)](\overline{P}\otimes\overline{Q})=\\&P^TH(A)\overline{P}\otimes Q^TH(B)\overline{Q}+(P^T\otimes Q^T)[G(A)\otimes H(B)](\overline{P}\otimes\overline{Q})=\\&I_m\otimes I_n+(P\otimes Q)^T[G(A)\otimes H(B)](\overline{P\otimes Q})=\\&I_{mn}+(P\otimes Q)^T[G(A)\otimes H(B)](\overline{P\otimes Q})\end{aligned}$$

因而 $A\otimes H(B)=[(P\otimes Q)^T]^{-1}I_{mn}(\overline{P\otimes Q})^{-1}+G(A)\otimes H(B)$,又因 $G(A)$ 为反 Hermite 矩阵,$H(B)$ 为 Hermite 阵,易知 $G(A)\otimes H(B)$ 为反 Hermite 阵,所以任意的 $0\neq X\in C^{mn\times 1}$,有 $Re\{X^T[G(A)\otimes H(B)]\overline{X}\}=0$,又因 $P\otimes Q$ 非异,故 $Y=(P\otimes Q)^{-1}X\neq 0$,所以

$$\begin{aligned}&Re\{X^T[A\otimes H(B)]\overline{X}\}=Re\{X^T[(P\otimes Q)^T]^{-1}I_{mn}\overline{(P\otimes Q)^{-1}X}\}=\\&Re\{[(P\otimes Q)^{-1}X]^TI_{mn}\overline{(P\otimes Q)^{-1}X}\}=Re(Y^TI_{mn}\overline{Y})=Y^T\overline{Y}>0\end{aligned}$$

由引理3(2),$A\otimes H(B)$ 为复亚正定阵。同理,$H(A)\otimes B$ 为复亚正定阵,证毕。

3 Schur 定理与华罗庚定理的推广

设 $A=(a_{jk})_{n\times n}$ 与 $B=(b_{jk})_{n\times n}$ 均为 n 阶复方阵,它们的 Hadamard 乘积 $A\circ B=(a_{jk}b_{jk})_{n\times n}$ 在理论上和应用上有很多应用,下面就 A 与 B 为复亚正定阵的情况加以讨论。

定理2 设 A 与 B 均为 n 阶复亚正定阵,则 $A\circ H(B)$,$H(A)\circ B$ 亦为复亚正定阵。

证:当 A 与 B 都是 n 阶复方阵时,容易看出,$A\circ H(B)$ 的 n 个行恰好是 $A\otimes H(B)$ 的第 $1,n+2,2n+3,\cdots,n^2$ 这 n 个行。$A\circ H(B)$ 的 n 个列恰好是 $A\otimes H(B)$ 的第 $1,n+2,2n+3,\cdots n^2$ 这 n 个列。故 $A\circ H(B)$ 是 $A\otimes H(B)$ 的一个主子矩阵,由定理1,$A\otimes H(B)$ 为复亚正定阵,再由引理3(8),$A\circ H(B)$ 为复亚正定阵,同理可证,$H(A)\circ B$ 亦为复亚正定阵。证毕。

若 A,B 均为 n 阶(实对称)正定阵时,$H(B)=B$,$A\circ H(B)=A\circ B$,由定理2即得下面的 Schur 定理:

推论1 两个正定阵的 Hadamard 乘积仍正定。

定理3 设 $A=(a_{jk})_{n\times n}$ 为复亚正定阵,则对任何正整数 k,方阵

$$G=\begin{bmatrix}a_{11}(Rea_{11})^{k-1} & a_{12}(\frac{a_{12}+\overline{a_{21}}}{2})^{k-1} & \cdots & a_{1n}(\frac{a_{1n}+\overline{a_{n1}}}{2})^{k-1}\\ a_{21}(\frac{a_{21}+\overline{a_{12}}}{2})^{k-1} & a_{22}(Rea_{22})^{k-1} & \cdots & a_{2n}(\frac{a_{2n}+\overline{a_{n2}}}{2})^{k-1}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots & & & \\ a_{n1}(\frac{a_{n1}+\overline{a_{1n}}}{2})^{k-1} & a_{n2}(\frac{a_{n2}+\overline{a_{2n}}}{2})^{k-1} & \cdots & a_{nn}(R_ea_{nn})^{k-1}\end{bmatrix}$$

是复亚正定阵。

证:因 $G = A \circ \underbrace{H(A) \circ H(A) \circ \cdots \circ H(A)}_{k-1个}$,由定理2及归纳法即得证。

当 A 为(实对称)正定阵时,$A = H(A)$,即得下面关于(实对称)正定阵的华罗庚定理:

推论2[5] 设 $A = (a_{jk})_{n \times n}$ 是(实对称)正定阵,则对任何正整数 k,方阵

$$\begin{bmatrix} a_{11}^{k} & a_{12}^{k} & \cdots & a_{1n}^{k} \\ a_{21}^{k} & a_{22}^{k} & \cdots & a_{2n}^{k} \\ \cdots\cdots & & & \\ a_{n1}^{k} & a_{n2}^{k} & \cdots & a_{nn}^{k} \end{bmatrix}$$

是正定阵。

推论3 设 $A = (a_{jk})_{n \times n}$ 与 $B = (b_{jk})_{n \times n}$ 均为复亚正定阵,则对任何复数 $d_{jk}(1 \leqslant j < k \leqslant n)$,任何纯虚数 $d_{jj}(j = 1, \cdots, n)$ 及任何正整数 k,方阵

$$G_1 = \begin{bmatrix} (a_{11} + d_{11})(Reb_{11})^{k-1} & (a_{12} + d_{12})(\frac{b_{12} + \overline{b_{21}}}{2})^{k-1} & \cdots & (a_{1n} + d_{1n})(\frac{b_{1n} + \overline{b_{n1}}}{2})^{k-1} \\ (a_{21} - \overline{d_{12}})(\frac{b_{21} + \overline{b_{12}}}{2})^{k-1} & (a_{22} + d_{22})(Reb_{22})^{k-1} & \cdots & (a_{2n} + d_{2n})(\frac{b_{2n} + \overline{b_{n2}}}{2})^{k-1} \\ \cdots\cdots & & & \\ (a_{n1} - \overline{d_{1n}})(\frac{b_{n1} + \overline{b_{1n}}}{2})^{k-1} & (a_{n2} - \overline{d_{2n}})(\frac{b_{n2} + \overline{b_{2n}}}{2})^{k-1} & \cdots & (a_{nn} + d_{nn})(Reb_{nn})^{k-1} \end{bmatrix}$$

是复亚正定阵。

证:作反 Hermite 矩阵,$D = (d_{jk})_{n \times n}$,其中 $d_{jk} = -\overline{d_{kj}}(n \geqslant j > k \geqslant 1)$,因 A 是复亚正定阵,又因 $H(A + D) = H(A)$,故 $A + D$ 仍为复亚正定阵,但

$G_1 = (A + D) \circ \underbrace{H(B) \circ \cdots \circ H(B)}_{k-1个}$

故由定理2及归纳法知,G_1 是复亚正定阵。证毕。

参考文献:

[1] 杨载朴. 复亚正定矩阵[J]. 盐城工学院学报:自然科学版,2003(2):44-46.
[2] 佟文廷. 广义正定矩阵[J]. 数学学报,1984,27(6):801-810.
[3] 佟文廷. 关于矩阵张量积的谱[J]. 数学学报,1980,23(1):128-134.
[4] 屠伯埙. 亚正定阵理论(Ⅰ)[J]. 数学学报,1990,33(4):462-471.
[5] 华罗庚. 一个关于行列式的不等式[J]. 数学学报,1955,5(4):463-470.

Some Theorems of Complex Metapositive Definite Matrix

YANG Zai-pu

(Department of Foundamental Sciences, Yancheng Institute of Technology, Jiangsu Yancheng 224003, China)

Abstract: In this paper we first discuss the properties of Kronecker product of complex metapositive definite matrices, and then generalize the Schur theorem, the Hua Luogeng theorem.

Keywords: complex metapositive definite matrix; Kronecker product; Hadamard product; Schur theorem.