

关于一类非线性偏微分方程的异宿轨及其行波解*

朱庆国

(盐城工学院 基础教学部, 江苏 盐城 224003)

摘要: 一大类非线性偏微分方程都存在行波解, 此时这类偏微分方程能转化为相应的常微自治系统。讨论这类偏微分方程的常微定性结构, 同时给出它们的显式行波解。

关键词: 非线性偏微分方程 异宿轨 行波解

中图分类号: O175.29

文献标识码: A

文章编号: 1671-5322(2007)01-0016-07

许多领域的数学物理问题都可以用微分方程描述, 尤其是一些重要的物理力学问题都可归结为非线性偏微分方程的研究^[1-3]。而许多非线性偏微分方程都存在有所谓行波解, 此时这类方程可转化为相应的常微自治系统, 因此我们可用常微方程的定性方法来加以研究, 我们可指出这类偏微分方程的行波解它将对应于相应常微分方程的异宿轨。本文主要考虑如下—类非线性偏微分方程, 其对时间的偏导数是二阶的, 且假定它们只含一个空间变量的情况, 我们来求出这类方程的异宿轨及其相应的行波解。

1 包含有中心奇点的鞍——鞍异宿轨及方程的行波解

设 $u = u(x, t)$, 考虑非线性偏微分方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + u \frac{\partial u}{\partial x} + k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (1.1)$$

其中常数 $k \neq 0$, 设方程(1.1)它有如下的行波解

$$u = u(\xi), \text{ 其中 } \xi = x - c \cdot t \quad (1.2)$$

这里 c 表示波速。将(1.2)代入方程(1.1)后即得下列常微方程

$$(c^2 + k)\ddot{u} + u\dot{u} = 0 \quad (1.3)$$

其中 u 上的每一黑点表示 u 对 ξ 的一次微商。将方程(1.3)对 ξ 积分一次得

$$(c^2 + k)\dot{u} + \frac{1}{2}u^2 = A \quad (\text{设积分常数 } A > 0)$$

$$\text{即 } \dot{u} = -\frac{1}{c^2 + k} \left(\frac{u^2}{2} - A \right)$$

在(1.4)中令 $\dot{u} = V$, 则(1.4)可化为

$$\begin{cases} \dot{u} = V \\ \dot{V} = \frac{1}{(c^2 + k)^2} \cdot u \left(\frac{u^2}{2} - A \right) \end{cases} \quad (1.5)$$

所得方程(1.5)即成为二维自治系统, 它与原方程(1.1)等价, 现研究方程(1.5), 方程(1.5)有三个奇点 $(0, 0)$, $(\sqrt{2A}, 0)$, 和 $(-\sqrt{2A}, 0)$ 方程(1.5)的 Jacobi 为

$$Jf(u, v) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{3u^2}{2} - A & 0 \end{bmatrix}$$

可得

$$Jf(0, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -A & 0 \end{bmatrix}$$

其特征方程 $\lambda^2 + \frac{A}{(c^2 + k)^2} = 0$ 有一对纯虚根

$\lambda_{1,2} = \pm \frac{\sqrt{A}}{|c^2 + k|} i$, $\therefore$ 得原点 $(0, 0)$ 它是系统(1.5)的近似线性系统的中心。关于 $(0, 0)$ 它是否为非线性系统(1.5)的中心, 这通常是一较困难的问题。

注意到方程(1.5)为

* 收稿日期: 2006-09-27

作者简介: 朱庆国(1946-), 男, 江苏海安人, 教授, 主要研究方向为微分几何、微分方程。

$$\begin{cases} \dot{u} = P(u, v) = V \\ \dot{v} = Q(u, v) = \frac{1}{(c^2 + k)^2} \left(\frac{u^3}{2} - Au \right) \end{cases}$$

由于 $p(u, -v) = -p(u, v)$, $q(u, -v) = q(u, v)$, 故根据[4]中定理 3.19, 可得原点 $(0, 0)$ 它也是非线性系统(1.5)的中心。

其次可得

$$Jf(\pm\sqrt{2A}, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{2A}{(c^2 + k)^2} & 0 \end{bmatrix}$$

其特征方程 $\lambda^2 - \frac{2A}{(c^2 + k)^2} = 0$ 有相异二实根

$$\lambda_{1,2} = \pm \frac{\sqrt{2A}}{|c^2 + k|},$$

故得奇点 $(\sqrt{2A}, 0)$ 和 $(-\sqrt{2A}, 0)$ 均是非线性系统(1.5)的鞍点。此时系统(1.5)的平面相图可表示为

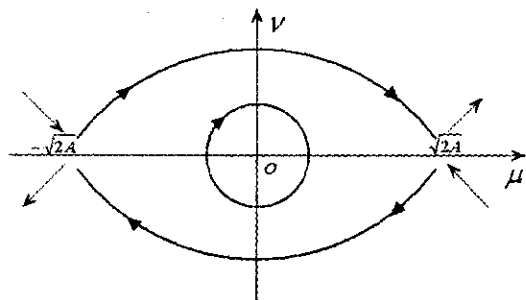


图1 含中心奇点的鞍-鞍异宿轨

Fig.1 Saddle-saddle heteroclinic orbit with central singular point

其中连接两个鞍点的轨道为异宿轨,且它包含着中心奇点 $O(0,0)$ 。下面可求相应于上述异宿轨的原方程(1.1)的行波解,由方程(1.4)我们可得

$$\begin{aligned} \frac{du}{d\xi} &= -\frac{1}{c^2 + k} \left(\frac{u^2}{2} - A \right) = -\frac{u^2 - 2A}{2(c^2 + k)} \\ \frac{du}{u^2 - 2A} &= -\frac{d\xi}{2(c^2 + k)} \end{aligned}$$

对上式积分注意到

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(x-a)(x-b)} &= \\ -\frac{2}{a-b} \operatorname{th}^{-1} \left(\frac{2x - (a+b)}{a-b} \right) \quad (a > b) \end{aligned}$$

故有 $-\frac{1}{\sqrt{2A}} \operatorname{th}^{-1} \frac{u}{\sqrt{2A}} = -\frac{\xi}{2(c^2 + k)}$,

因此可得方程(1.1)的下列行波解

$$u = \sqrt{2A} \operatorname{th} \left(\frac{\sqrt{2A}\xi}{2(c^2 + k)} \right) \quad (1.6)$$

解(1.6)即表示一种冲击波,见图2

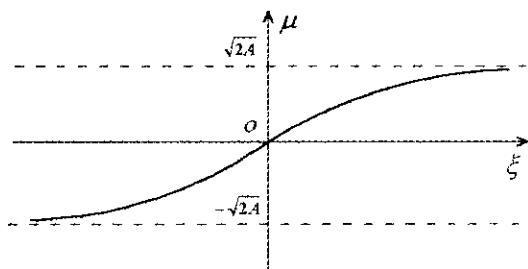


图2 鞍-鞍冲击波解

Fig.2 Shock wave solution

冲击波解(1.6)它对应于图1中连接两个鞍点的异宿轨,值得指出的是 u 对 ξ 的导数

$$v = \dot{u} = \frac{A}{c^2 + k} \operatorname{sech}^2 h \left(\frac{\sqrt{2A}\xi}{2(c^2 + k)} \right)$$

它表示是一种孤立波。

2 对应于鞍——结(或鞍—焦)异宿轨的方程的行波解

考虑非线性偏微分方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \beta \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0 \quad (2.1)$$

其中常数 $\beta \neq 0$ 。

同样设方程(2.1)它有行波解

$$u = u(\xi), \xi = x - c \cdot t \quad (2.2)$$

将(2.2)代入(2.1)后可得下列常微方程

$$c^2 \ddot{u} + u \dot{u} + \beta \ddot{u} = 0$$

上式两边积分得

$$\beta \ddot{u} + c^2 \dot{u} + \frac{1}{2} u^2 = A \quad (\text{设 } A > 0)$$

$$\text{即 } \ddot{u} = \frac{1}{\beta} \left(-c^2 \dot{u} - \frac{1}{2} u^2 + A \right) \quad (2.3)$$

令 $\dot{u} = v$, 方程(2.3)可改写为

$$\begin{cases} \dot{u} = V \\ \dot{v} = \frac{1}{\beta} \left(-c^2 v - \frac{1}{2} u^2 + A \right) \end{cases} \quad (2.4)$$

系统(2.4)即成为二维自治系统,它有两个奇点 $(\sqrt{2A}, 0)$ 和 $(-\sqrt{2A}, 0)$, 系统(2.4)的 Jacobian 为

$$Jf(u, v) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{u}{\beta} & -\frac{c^2}{\beta} \end{bmatrix}$$

可得

$$Jf(\sqrt{2A}, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{\sqrt{2A}}{\beta} & -\frac{c^2}{\beta} \end{bmatrix}$$

其特征方程为 $\lambda \left(\lambda + \frac{c^2}{\beta} \right) + \frac{\sqrt{2A}}{\beta} = 0$

故得特征值 $\lambda_{1,2} = \frac{-\frac{c^2}{\beta} \pm \sqrt{\frac{c^4}{\beta^2} - \frac{4\sqrt{2A}}{\beta}}}{2}$, 下

面分两种情况

(1) 设 $\beta < 0$, 则特征值为相异二实根, 此时可得 $(\sqrt{2A}, 0)$ 为鞍点。

(2) 设 $\beta > 0$,

①若 $c^4 - 4\sqrt{2A}\beta > 0$, 即 $c > \sqrt[4]{4\sqrt{2A}\beta}$, 此时特征值为两个负实根, 可得 $(\sqrt{2A}, 0)$ 为稳定结点。

②若 $c^4 - 4\sqrt{2A}\beta < 0$, 即 $c < \sqrt[4]{4\sqrt{2A}\beta}$, 此时特征值为具负实部的一对共轭复根, 可得 $(\sqrt{2A}, 0)$ 为稳定焦点。

对奇点 $(-\sqrt{2A}, 0)$ 也可作类似分析, 可得

(1) 设 $\beta < 0$

①若 $c > \sqrt[4]{4\sqrt{2A}|\beta|}$, 则奇点 $(-\sqrt{2A}, 0)$ 为系统(2.4)的不稳定结点

②若 $c < \sqrt[4]{4\sqrt{2A}|\beta|}$, 则奇点 $(-\sqrt{2A}, 0)$ 为系统(2.4)的不稳定焦点

(2) 设 $\beta > 0$, 可得 $(-\sqrt{2A}, 0)$ 为系统(2.4)的鞍点。

这样由上面讨论可得

①当 $\beta < 0$, 奇点 $(\sqrt{2A}, 0)$ 为系统(2.4)的鞍点而奇点 $(-\sqrt{2A}, 0)$ 为不稳定结点(或焦点)而连结这两个奇点的轨道现为鞍-结异宿轨道(或鞍-焦异宿轨道)。见图 3。

②当 $\beta > 0$ 时, 奇点 $(\sqrt{2A}, 0)$ 为稳定结点(或焦点)而奇点 $(-\sqrt{2A}, 0)$ 为鞍点, 此时连结这两个奇点的轨道同样为鞍-结异宿轨道(鞍-焦异宿轨道)见图 4。

下面我们来求相应于图 3(或图 4)中鞍-结异宿轨的原方程(2.1)的行波解, 首先对与方程(2.1)等价的方程(2.3)作一变量代换, 设

$u = \sqrt{2A} + u_1$, 代入方程(2.3)中得

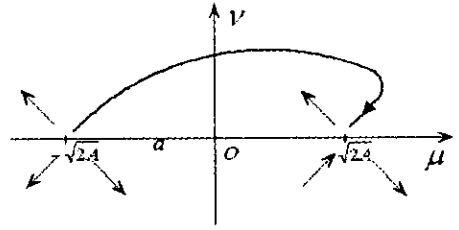
$$\beta \ddot{u}_1 + c^2 \dot{u}_1 + \frac{1}{2}(\sqrt{2A} + u_1)^2 = A$$

$$\beta \ddot{u}_1 + c^2 \dot{u}_1 + \sqrt{2A}u_1 + \frac{1}{2}u_1^2 = 0 \quad (2.5)$$

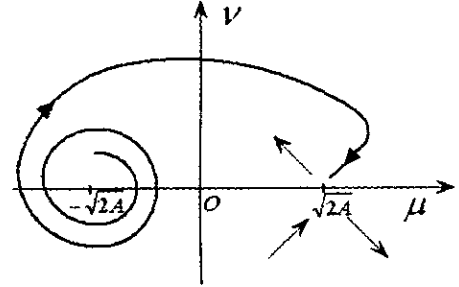
设方程(2.5)的解为

$$u_1 = \frac{B}{(1 + e^{\alpha\xi})^2} \quad (2.6)$$

其中 α, B 为待定常数。可求出



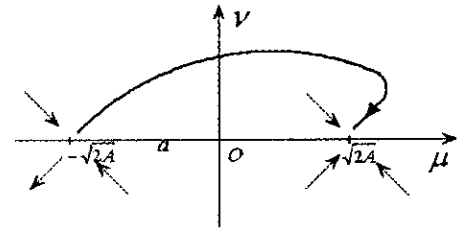
(a) 鞍-结异宿轨



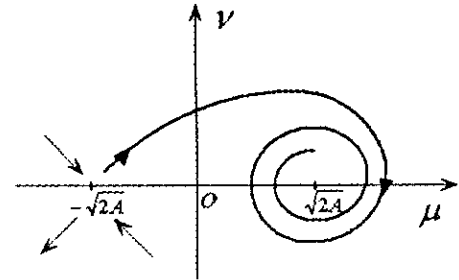
(b) 鞍-焦异宿轨

图 3 鞍-结异宿轨和鞍-焦异宿轨

Fig. 3 Saddle-nodal heteroclinic orbit and Saddle-focal heteroclinic orbit



(a) 鞍-结异宿轨



(b) 鞍-焦异宿轨

图 4 鞍-结异宿轨和鞍-焦异宿轨

Fig. 4 Saddle-nodal heteroclinic orbit and Saddle-focal heteroclinic orbit

$$\dot{u}_1 = \frac{-2B\alpha e^{\alpha\xi}}{(1 + e^{\alpha\xi})^3}, \ddot{u}_1 = \frac{-2B\alpha^2 e^{\alpha\xi}(1 - \alpha e^{\alpha\xi})}{(1 + e^{\alpha\xi})^4}$$

将它们代入(2.5)中可得下列方程

$$(4B\alpha^2\beta - 2B\alpha c^2 + \sqrt{2A}B)e^{2\alpha\xi} - (2B\alpha^2\beta + 2B\alpha c^2 - 2\sqrt{2A}B)e^{\alpha\xi} + \sqrt{2A}B + \frac{B^2}{2} = 0$$

$$\begin{cases} \sqrt{2A} + \frac{B}{2} = 0 \\ -\alpha^2\beta - \alpha c^2 + \sqrt{2A} = 0 \\ 4\alpha^2\beta - 2\alpha c^2 + \sqrt{2A} = 0 \end{cases} \quad (2.7)$$

由(2.7)可求得

$$B = -2\sqrt{2A}, \alpha = \frac{3c^2}{5\beta} \quad (2.8)$$

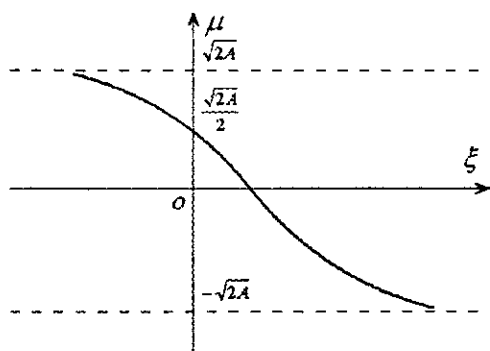
将(2.8)代入(2.6)中即得

$$u_1 = \frac{-2\sqrt{2A}}{(1 + e^{\frac{3c^2}{5\beta}\xi})^2}$$

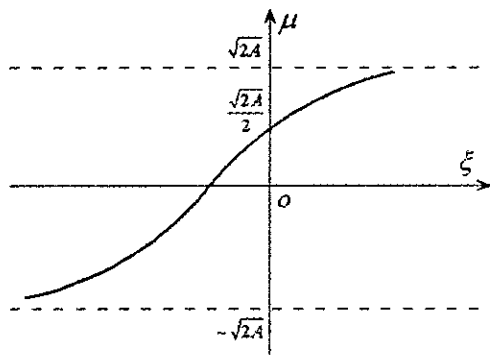
于是最后我们得原方程(2.1)对应于鞍-结异宿轨的下列行波解

$$u(\xi) = \sqrt{2A} \left(1 - \frac{2}{(1 + e^{\frac{3c^2}{5\beta}\xi})^2}\right) \quad (2.9)$$

由解(2.9)的上述表达式可看出,(1)当 $\beta < 0$ 时,若 $\xi \rightarrow \infty$,则 $u \rightarrow \sqrt{2A}$,若 $\xi \rightarrow -\infty$,则 $u \rightarrow -\sqrt{2A}$,且 $u(0) = \frac{1}{2}\sqrt{2A}$;(2)当 $\beta > 0$ 时,若 $\xi \rightarrow -\infty$,则 $u \rightarrow -\sqrt{2A}$,若 $\xi \rightarrow +\infty$,则 $u \rightarrow \sqrt{2A}$,且 $u(0) = \frac{1}{2}\sqrt{2A}$,此鞍-结冲击波解(2.9)的图形可见图5



(a) $\beta < 0$ 时 $u(\xi)$ 的图形



(b) $\beta > 0$ 时 $u(\xi)$ 的图形

图5 鞍-结冲击波解

Fig.5 Saddle - nodal shock wave solution $u(\xi)$

至于对应于鞍-焦异宿轨的行波解,在 $\beta < 0$ 时, $\xi > 0$ 的一段类似于孤立波,而 $\xi < 0$ 的一段则类似于衰减振荡,将二者结合起来即形成为方程(2.1)的下列鞍-焦冲击波解

$$u(\xi) = \begin{cases} \sqrt{2A} + \sqrt{2A}e^{\frac{3c^2}{5\beta}\xi} \cos \sqrt{\frac{\sqrt{2A}}{\beta} - \frac{(3c^2)}{2\beta}}\xi & (-\infty, 0) \\ -\sqrt{2A} + 3\sqrt{2A}\operatorname{sech} \sqrt{\frac{\sqrt{2A}}{4\beta}}\xi & (0, +\infty) \end{cases} \quad (2.9)$$

其图形可表示为图6

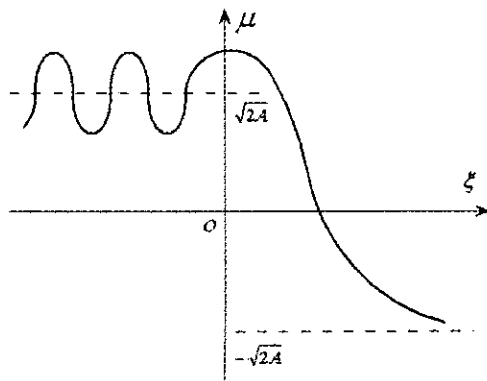


图6 鞍-焦冲击解 $u(\xi)$

Fig.6 Saddle - focal shock wave solution $u(\xi)$

3 对应于含焦点(或结点)的鞍-鞍异宿轨的方程的行波解

考虑以下的非线性偏微分方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = u(u-1)(u-a) \quad (3.1)$$

其中 $0 < a < 1$

同样设方程(3.1)有行波解

$$u = u(\xi) \quad \xi = x - c \cdot t \quad (3.2)$$

将(3.2)代入方程(3.1)中可得下列常微方程

$$(c^2 + 1)\ddot{u} + \dot{u} = u(u-1)(u-a) = u^3 - (1+a)u^2 + au \quad (3.3)$$

令 $\dot{u} = V$, 方程(3.3)可改写为

$$\begin{cases} \dot{u} = V \\ \dot{V} = \frac{1}{c^2 + 1} [-V + au - (1+a)u^2 + u^3] \end{cases} \quad (3.4)$$

方程(3.4)现有平衡点 $(0,0)$ $(1,0)$ 和 $(a,0)$, 方程(3.4)的 Jacobi

$$Jf(u,v) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{c^2 + 1} [a - 2(1+a)u + 3u^2] & -\frac{1}{c^2 + 1} \end{bmatrix}$$

可得

$$Jf(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{a}{c^2 + 1} & -\frac{1}{c^2 + 1} \end{bmatrix}$$

其特征方程 $\lambda(\lambda + \frac{1}{c^2 + 1}) - \frac{a}{c^2 + 1} = 0$, 即 $(c^2 + 1)$

$\lambda^2 + \lambda - a = 0$, 可得特征值 $\lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4a(c^2+1)}}{2(c^2+1)}$ 为一对异号实根,

故(0,0)为鞍点,同理可判别(1,0)也是鞍点,其次得

$$Jf(a,0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{a(a-1)}{c^2+1} & \frac{-1}{c^2+1} \end{bmatrix}$$

其特征方程 $\lambda(\lambda + \frac{1}{c^2+1}) - \frac{a(a-1)}{c^2+1} = 0$, 即 $(c^2+1)\lambda^2 + \lambda - a(a-1) = 0$, 得特征值 $\lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4a(a-1)(c^2+1)}}{2(c^2+1)}$

(1) 若 $1+4a(a-1)(c^2+1) > 0$, 则特征值为两负实根, 可得(0,0)点为稳定结点。

(2) 若 $1+4a(a-1)(c^2+1) < 0$, 则特征值为具负实部的一对共轭复根, 可得(0,0)点为稳定焦点。

此时在相平面上会存在两对异宿轨道之一, 见图 7

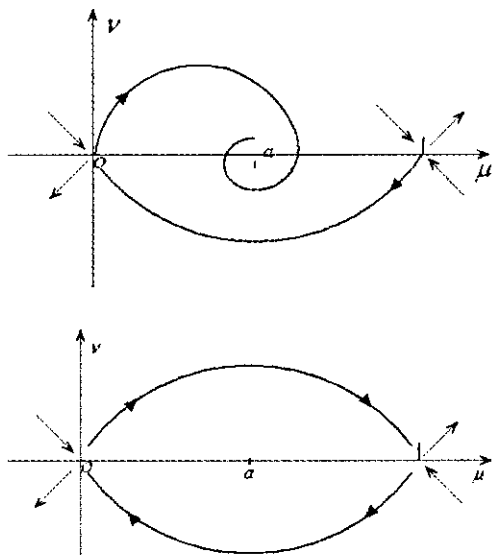


图 7 鞍-鞍异宿轨道

Fig. 7 Saddle-saddle heteroclinic orbit

下面我们可求相应于上述鞍-鞍异宿轨的原方程(3.1)的行波解。为此设 $\dot{u} = P$, 则 $\ddot{u} = P \frac{dP}{du}$, 代入方程(3.3)中可得

$$(c^2+1)P \frac{dP}{du} + P = au - (1+a)u^2 + u^3 \quad (3.5)$$

设方程(3.5)有多项式形式的解

$$P = A_1 + A_2u + A_3u^2$$

将其代入(3.5)式有

$$(c^2+1)(A_1 + A_2u + A_3u^2) \cdot (A_2 + 2A_3u) + (A_1 + A_2u + A_3u^2) = au - (1+a)u^2 + u^3$$

即 $(c^2+1)A_1A_2 + A_1 + [(c^2+1)(A_2 + 2A_1A_3) + A_2]u + [3(c^2+1)A_2A_3 + A_3]u^2 + 2(c^2+1)A_3^2 \cdot u^3 = au - (1+a)u^2 + u^3$ 所以得

$$\begin{cases} (c^2+1)A_1A_2 + A_1 & (3.6) \\ (c^2+1)(A_2^2 + 2A_1A_3) + A_2 = a & (3.7) \\ 3(c^2+1)A_2A_3 + A_3 = -(1+a) & (3.8) \\ 2(c^2+1)A_3^2 = 1 & (3.9) \end{cases}$$

由(3.6)可得 $A_1 = 0$ 或 $A_2 = -\frac{1}{c^2+1}$, 由(3.9)可

得 $A_3 = \pm \frac{1}{\sqrt{2(c^2+1)}}$, 现只考虑 $A_1 \neq 0, A_2 = -\frac{1}{c^2+1}, A_3 = \frac{1}{\sqrt{2(c^2+1)}}$ 的情况, 将 $A_2 = -\frac{1}{c^2+1}, A_3 = \frac{1}{\sqrt{2(c^2+1)}}$ 代入(3.7)式, 得 $A_1 = \frac{a}{\sqrt{2(c^2+1)}}$, 代入(3.8)式得 $\frac{1}{c^2+1} = \frac{(1+a)^2}{2}$, 这样我们有

我们有 $A_1 = \frac{a(1+a)}{2}, A_2 = -\frac{(1+a)^2}{2}, A_3 = \frac{(1+a)}{2}$, 于是可得

$$A_1 = \frac{a(1+a)}{2}, A_2 = -\frac{(1+a)^2}{2}, A_3 = \frac{(1+a)}{2}$$

于是可得

$$\begin{aligned} \frac{du}{d\xi} &= P = A_1 + A_2u + A_3u^2 = \\ &= \frac{a(1+a)}{2} - \frac{(1+a)^2}{2}u + \frac{(1+a)}{2}u^2 = \\ &= \frac{1+a}{2}(u-1)(u-a) \end{aligned} \quad (3.10)$$

然后将方程(3.10)分离变量并积分得

$$-\frac{2}{1-a} \operatorname{th}^{-1}\left(\frac{2u - (1+a)}{1-a}\right) = -\frac{1+a}{2}\xi$$

最后我们可得原方程(3.1)的下列鞍-鞍冲击波解

$$U(\xi) = \frac{(1+a) - (1-a) \operatorname{th}\left(\frac{1-a^2}{4}\xi\right)}{2} \quad (3.11)$$

4 极限环与稳定解

考虑如下非线性偏微分方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + u - a\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) - b\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 - d\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^3 = 0 \quad (4.1)$$

其中 a, b, d 为常数。

同样设方程(4.1)它有行波解 $u = u(\xi)$, $\xi = x - c \cdot t$, 将它代入方程(4.1)中得常微方程

$$c^2 \ddot{u} + u - a\dot{u} - b(\dot{u})^2 - d(\dot{u})^3 = 0$$

即 $\ddot{u} = \frac{1}{c^2} [-u + a\dot{u} + b(\dot{u})^2 + d(\dot{u})^3]$ (4.2)

令 $\dot{u} = V$, 则方程(4.2)化为

$$\begin{cases} \dot{u} = V \\ \dot{V} = \frac{1}{c^2} [-u + aV + bV^2 + dV^3] \end{cases} \quad (4.3)$$

关于方程(4.3)我们将有下列结果

命题 设 $a > 0, d < 0$, 系统(4.3)在平面上至少存在一稳定极限环。

证 方程(4.3)有唯一奇点 $(0,0)$, 方程(4.3)的 Jacobi 为

$$Jf(u, v) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{c^2} & \frac{1}{c^2}(a + 2bV + 3dV^2) \end{bmatrix}$$

可得

$$Jf(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{c^2} & \frac{a}{c^2} \end{bmatrix}$$

其特征方程 $\lambda(\lambda - \frac{a}{c^2}) + \frac{1}{c^2} = 0$ 有特征值 $\lambda_{1,2} =$

$$\frac{a}{c^2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{c^4} - \frac{4}{c^2}}, \text{ 这里可分两种情况:}$$

(i) 当 $a^2 - 4c^2 > 0$, 即 $a > 2c$ 时, 特征值为两正实根, 此时可得 $(0,0)$ 是系统(4.3)的不稳定结点。

(ii) 当 $a^2 - 4c^2 < 0$, 即 $0 < a < 2c$ 时, 特征值为负实部的一对共轭复根, 可得 $(0,0)$ 是系统(4.3)的不稳定焦点。

下面我们来研究无穷远奇点, 为此作一庞加莱变换, 设 $u = \frac{y}{z}, V = \frac{y}{z}$, 则方程(4.3)变为

$$\begin{cases} \frac{dz}{d\xi} = -yz \\ \frac{dy}{d\xi} = \frac{1}{c^2} [-1 + (ay + b\frac{y^2}{z} + d\frac{y^3}{z^2})] - y^2 \end{cases} \quad (4.4)$$

再令 $d\tau = \frac{d\xi}{z^2}$, 则方程(4.4)变为

$$\begin{cases} \frac{dz}{d\tau} = -yz^3 \\ \frac{dy}{d\tau} = \frac{1}{c^2} [-z^2 + ayz^2 + by^2 + dy^3] - y^2z^2 \end{cases} \quad (4.5)$$

可以判别人方数据 $D(0,0)$ 它是方程(4.5)的鞍点, 在

单位圆盘上, 对应的无穷远点 $\tilde{D}$ 和 $\tilde{D}'$ 也是鞍点。

再作庞加莱变换, 设 $u = \frac{y}{z}, V = \frac{1}{z}$, 方程

(4.3)变为

$$\begin{cases} \frac{dz}{d\xi} = \frac{1}{c^2} [yz - az - b - \frac{d}{z}] \\ \frac{dy}{d\xi} = \frac{1}{c^2} [y^2 - az - b\frac{y}{z} - d\frac{y}{z^2}] + 1 \end{cases} \quad (4.6)$$

令 $d\tau = \frac{d\xi}{z^2}$, (4.6)变为

$$\begin{cases} \frac{dz}{d\tau} = \frac{1}{c^2} [-dz - bz^2 - az^3 + yz^3] \\ \frac{dy}{d\tau} = \frac{1}{c^2} [-dy - byz - ayz^2 + y^2z^2] + z^2 \end{cases} \quad (4.7)$$

同样可判别 $C(0,0)$ 它是方程(4.7)的不稳定结点, 在单位圆盘上, 对应的无穷远点 $\tilde{C}$ 和 $\tilde{C}'$ 也是不稳定结点, 系统(4.3)的全局相图见图8

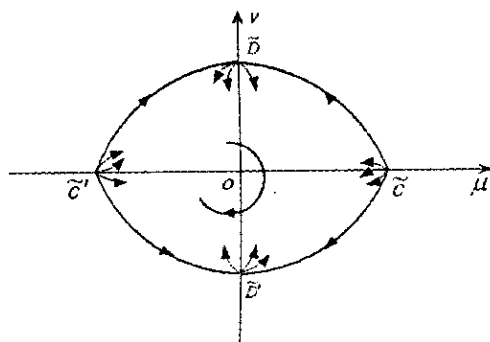


图8 全局相图

Fig.8 Global phase diagram

从图8我们可看出, 在有限平面上系统(4.3)它有唯一奇点 $O(0,0)$, 它是一不稳定焦点(或结点)并考虑到 Γ 是由轨线和奇点 $\tilde{C}, \tilde{C}', \tilde{D}, \tilde{D}'$ 所组成, 且无穷远点 $\tilde{C}, \tilde{C}', \tilde{D}, \tilde{D}'$ 都是远离型的, 这样我们可把 Γ 看作是庞加莱环域的外边界线, 从而由庞加莱环域定理可知在原点 $O(0,0)$ 的外围系统(4.3)至少存在一稳定极限环。

注意到系统(4.3)在有限平面上只有唯一奇点 $(0,0)$, 从而系统无异宿轨, 故与之对应的原方程(4.1)亦不存在波速 c 不为 0 的行波解, 而现在我们可求原方程(4.1)的一稳定解(即与时间 t 无关的解)。为此设方程(4.1)有稳定解 $u = u(x)$, 则方程(4.1)此时即成为

$$a \frac{du}{dx} + b \left(\frac{du}{dx} \right)^2 + d \left(\frac{du}{dx} \right)^3 = u \quad (4.8)$$

令 $\frac{du}{dx} = \tau$, (4. 8) 为

$$u = a\tau + b\tau^2 + d\tau^3$$

可得 u 的全微分

$$du = (a + 2b\tau^2 + 3d\tau^2) d\tau$$

又 $du = \tau dx$, 于是

$$(a + 2b\tau^2 + 3d\tau^2) d\tau = \tau dx$$

$$\left(\frac{a}{\tau} + 2b + 3d\tau\right) d\tau = dx$$

两边积分得

$$x = a \ln |\tau| + 2b\tau + \frac{3d}{2}\tau^2$$

从而可得原方程 (4. 1) 如下形式的一稳定解

$$\begin{cases} x = a \ln |\tau| + 2b\tau + \frac{3d}{2}\tau^2 \\ u = a\tau + b\tau^2 + d\tau^3 \end{cases} \quad (4. 9)$$

正如 Kdv 方程的稳定解 $u = 3 \sec^2 h \frac{x}{2} - 1$ 可表征 Kdv 方程的性态一样, 此稳定解 (4. 9) 也可表征方程 (4. 1) 的性态, 例如它应与前述稳定极限环相匹配。

参考文献：

[1] Fife P. C. Mathematical Aspects of Reacting and diffusing systems. Lecture Notes in Biomathematics 28 [M]. New York Heidelberg Berlin. Springer – Verlag. 1979.
[2] Jones d S. Sleeman B d. differential Equations and Mathematical Biology [M]. London :George Allen and Unwin Ltd. 1983.
[3] Murry J d. Mathematical Biology [M]. New York, Heidelberg. Berlin Springer. Verlag. 1989.
[4] 陆启韶. 常微分方程的定性方法和分叉 [M]. 北京 北京航空航天大学出版社, 1989.

On Heteroclinic Orbit and Progressive Wave Solution of a Class of Nonlinear Partial differential Equations

ZHU Qing – guo

(Department of Basic Sciences Teaching, Yancheng Institute of Technology, Jiangsu Yancheng 224003, China)

Abstract : A big class of nonlinear partial differential equations have progressive wave solutions, which can be transformed into ordinary differential autonomous system. This paper discusses the ordinary differential qualitative structure of the kind of partial differential equations and presents their explicit progressive wave solutions.
Keywords : nonlinear presents differential equation ; heteroclinic orbit ; progressive wave solution