

外币标的可转换债券定价的鞅方法^{*}

张江红¹, 杨善朝²

(1. 咸阳师范学院 数学系, 陕西 咸阳 712000 2. 广西师范大学 数科院, 广西 桂林 541004)

摘 要 可转换债券是一种具有筹资和辟险的双重功能的金融衍生工具, 在我国还是比较新颖而陌生的。针对我国资本市场创新金融工具匮乏等特点, 提出了一种类似于 B 股可转债的可转债形式, 拟通过国际资本市场筹措资金以拓宽企业融资渠道, 并利用鞅方法给出其价值公式。

关键词 可转换债券 期权 回售 Girsanov 变换

中图分类号 O211.6, F830.9 **文献标识码** A **文章编号** 1671-5322(2007)01-0023-04

可转换债券(Convertible Bonds)是公司发行的、在一般债券上附加期权的一种债务工具, 持有者有权在将来的特定时期内根据某个确定转换比例将其转换成该发行公司的股权^[1]。近年来, 这种融资方式在我国正逐步的被接受和运用, 它对开拓我国企业的融资渠道, 拓展市场投资方式, 促进和繁荣我国证券市场的发展具有十分重要的意义。

我国可转债始于 20 世纪 90 年代初, 在当时没有有关可转债融资的相关规定和条例约束下, 各类企业已尝试发行可转债筹集资金, 其中 1993 年、1995 年中纺机和深南玻就发行了 B 股可转债, 实现了通过国际市场筹资的尝试, 但最终结果不尽人意。中纺机发行可转债后公司业绩大幅下滑, 转股价远高于股票市价, 导致在转债回售日绝大多数投资者选择了行使回售权, 公司不得不以面值 110% 回售, 造成巨大的财务压力, 更严峻的是中纺机本身没有外币—瑞士法郎, 又不得不以美元兑换瑞士法郎来还债, 加之此间瑞士法郎又大幅升值, 使得中纺机雪上加霜(要承担大量外汇损失)。深南玻吸取中纺机的教训, 发行时以美元标价, 尽管降低了外汇风险, 但由于股价持续疲软也遭受了被回售的命运。之后, 我国发行的可转债多以 A 股可转债为主^[2]。

在国际经济、资本全球化的今天, 通过发行可转债从国际资本市场筹措资金对于国内大中型企业来说不失为一种好的渠道, 可以极大的缓解资金不足的压力, 但前辙可鉴, 发行可转债时必须慎重考虑汇率变动的风险。针对这一情况, 本文提出了类似于 B 股可转债的一种可转债形式, 并利用鞅理论^[4,5]给出了引入汇率风险的理论定价。

1 理论模型

考虑某境外上市公司拟发行一种可转债, 其面值为 M (本币), 票面利率为 R , 转股价为 K (本币), 到期期限为 T 年, 标的股票为该公司境外上市股票 (外币), 目前该股票市价为 S_0 , 当前汇率为 X_0 (本币/1 外币)。为了避免出现类似与中纺机等提前被回售的结局, 该转债不设回售条款, 且只有到期时方可行使转换权。

* 收稿日期 2006-10-20

基金项目 广西自然科学基金项目(04047033) 咸阳师范学院专项科研基金项目(06XSYK251)。

作者简介 张江红(1974-), 男, 陕西蒲城人, 讲师, 硕士, 主要研究方向为金融统计。

由上述可知,此可转债的转股率为 $(M/X_0)/(K/X_0)$, 记为 n_0 。到期时,若不进行转换,则本息为 $M(1+R)$, 记为 H 。因此,到期时该可转债价值为

$$V(T, S_T, X_T) = \max(H, nS_T X_T),$$

根据风险中性估值原理, t 时刻该可转债价值为

$$V(t, S_t, X_t) = e^{-r(T-t)} E(\max(H, nS_T X_T)) \quad (1)$$

从而有如下结论

定理 在上述条件下,可转换债券债 t 时刻的价值为

$$V(t, S_t, X_t) = e^{-r(T-t)} HN(d_1) + nX_t S_t e^{a(T-t)} N(-d_2),$$

其中 $a = r_1 + r_2 + \rho\sigma_1\sigma_2 - r$,

$$d_1 = \frac{\ln(H/(nS_t X_t)) - (r_1 + r_2 - \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{2})(T-t)}{\sigma_{12} \sqrt{T-t}}$$

$$d_2 = \frac{\ln(H/(nS_t X_t)) - (r_1 + r_2 + \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{2} + 2\rho\sigma_1\sigma_2)(T-t)}{\sigma_{12} \sqrt{T-t}}$$

$$\sigma_{12}^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2$$

2 基本假设

(1) 国内无风险利率为 r (常数),市场是无磨擦的。

(2) 股票变化、汇率变化分别服从以下几何 Brown 运动。

$$dS_t = r_1 S_t dt + \sigma_1 S_t dW_t^1$$

$$dX_t = r_2 X_t dt + \sigma_2 X_t dW_t^2$$

其中 r_1, σ_1 分别为股票预期收益率、股票瞬间波动率, r_2, σ_2 分别为汇率预期收益率、汇率瞬间波动率, W_t^1, W_t^2 均为标准 Brown 运动, $\text{Cov}(dW_t^1, dW_t^2) = \rho dt$ 。

3 相关引理

引理 1^[3] (Ito 公式) 设 $F(x, y)$ 满足: F_x, F_y, F_{xx} 连续, X_t 为 (B, F_t) 上的 Ito 过程, 即 $dX_t = b_t dt + \sigma_t dW_t$, 那么有 $dF(X_t, t) = F_x dX_t + F_y dt + \frac{1}{2} F_{xx} \sigma_t^2 dt$ 。

由此定理可知 T 时刻股票价格为(在原测度下)

$$S_T = S_t e^{(r_1 - \frac{\sigma_1^2}{2})(T-t) + \sigma_1 W_{T-t}^1}, X_T = X_t e^{(r_2 - \frac{\sigma_2^2}{2})(T-t) + \sigma_2 W_{T-t}^2} \quad (2)$$

引理 2^[4] (Girsanov 变换) 设 $\phi \in L_2^{loc}$, 且 (F_t) 指数上鞅

$$z_t = \exp\left\{\int_0^t \phi dW - \frac{1}{2} \int_0^t \phi_u^2 du\right\}$$

在 $0 \leq t \leq T (T \leq \infty)$ 上是 (F_t) 指数鞅, 那么 (Ω, F, P) 上 (F_t) Brown 运动 W 的平移: $W_t^Q = W_t - \int_0^t \phi_u du$ 对 $0 \leq t \leq T$ 是 (Ω, F, Q) 上 (F_t) Brown 运动, 其中 Q 是 $Q(A) = E(I_A z_t) = \int_A z_t dP$, $(A \in F, t < T)$ 在 F_{T-} 上扩张得到的概率测度。在此测度下, 对于任意 R. V. $Y \in F_T$ 有 $E^Q(Y) = E^P(z_t Y)$, 其中 z_t 称为 Girsanov 因子。

在此变换下, T 时刻股票价格为(在新测度下)

$$S_T = S_t e^{(r_1 - \frac{\sigma_1^2}{2})(T-t) + \sigma_1 W_{T-t}^1}, X_T = X_t e^{(r_2 + \frac{\sigma_2^2}{2})(T-t) + \sigma_2 W_{T-t}^2} \quad (3)$$

引理 3^[5] 设 W^1, W^2 是 (Ω, F, P) 上 (F_t) 的两个 Brown 运动, 其相关系数为 ρ , 若概率测度 Q 的 Radon

—Nikodym 导数, 即 $\frac{dQ}{dP} = \exp\left(-\frac{\sigma_1^2}{2}t + \sigma_1 W_t^1\right)$, 那么对任意的 $t \geq 0$, $W_t^{1Q} = W_t^1 - \sigma_1 t$, $W_t^{2Q} = W_t^2 - \rho\sigma_1 t$ 均为 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上 (F_t) Brown 运动, 其相关系数仍为 ρ 。

4 定理证明

由(1)式可知 t 时刻可转债价值为

$$\begin{aligned} V(t, S_t, X_t) &= e^{-r(T-t)} E \{ \max(H, nS_T, X_T) \} = \\ &= e^{-r(T-t)} E \{ \max(nS_T X_T - H, 0) + H \} = \\ &= e^{-r(T-t)} H + e^{-r(T-t)} E \{ nS_T X_T - H \} I_{\{nS_T X_T > H\}} = \\ &= e^{-r(T-t)} H - e^{-r(T-t)} HE \{ I_{\{nS_T X_T > H\}} \} + ne^{-r(T-t)} E \{ S_T X_T I_{\{nS_T X_T > H\}} \} = \\ &= e^{-r(T-t)} H - \text{I} + \text{II}, \end{aligned}$$

其中 $\text{I} = e^{-r(T-t)} HE \{ I_{\{nS_T X_T > H\}} \}$, $\text{II} = ne^{-r(T-t)} E \{ S_T X_T I_{\{nS_T X_T > H\}} \}$

对于 I :

可知 $nS_T X_T > H \Leftrightarrow nS_t e^{(r_1 - \frac{\sigma_1^2}{2})(T-t) + \sigma_1 W_{T-t}^1} X_t e^{(r_2 - \frac{\sigma_2^2}{2})(T-t) + \sigma_2 W_{T-t}^2} > H$ (利用式(2))

$$\Leftrightarrow e^{(r_1 + r_2 - \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{2})(T-t) + \sigma_1 W_{T-t}^1 + \sigma_2 W_{T-t}^2} > H / (nS_t X_t)$$

$$\Leftrightarrow \sigma_1 W_{T-t}^1 + \sigma_2 W_{T-t}^2 > \ln(H / (nS_t X_t)) - (r_1 + r_2 - \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{2})(T-t).$$

由于 W_{T-t}^1, W_{T-t}^2 均为标准 Brown 运动即服从正态分布, 而正态分布的线性组合仍是正态分布, 故 $\sigma_1 W_{T-t}^1 + \sigma_2 W_{T-t}^2$ 仍为正态分布, 且

$$\begin{aligned} E(\sigma_1 W_{T-t}^1 + \sigma_2 W_{T-t}^2) &= \sigma_1 E(W_{T-t}^1) + \sigma_2 E(W_{T-t}^2) = 0, \\ \text{Var}(\sigma_1 W_{T-t}^1 + \sigma_2 W_{T-t}^2) &= \sigma_1^2 \text{Var}(W_{T-t}^1) + \sigma_2^2 \text{Var}(W_{T-t}^2) + 2\sigma_1 \sigma_2 \text{Cov}(W_{T-t}^1, W_{T-t}^2) = \\ &= (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\rho\sigma_1 \sigma_2)(T-t) = \sigma_{12}^2(T-t), \end{aligned}$$

其中 $\sigma_{12}^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\rho\sigma_1 \sigma_2$.

因此 $\sigma_1 W_{T-t}^1 + \sigma_2 W_{T-t}^2 \sim N(0, \sigma_{12}^2(T-t))$, 即 $\frac{\sigma_1 W_{T-t}^1 + \sigma_2 W_{T-t}^2}{\sigma_{12} \sqrt{T-t}} \sim N(0, 1)$,

从而有

$$\begin{aligned} \text{I} &= e^{-r(T-t)} HE \{ I_{\{nS_T X_T > H\}} \} = e^{-r(T-t)} HP(nS_T X_T > H) = \\ &= e^{-r(T-t)} HP(\sigma_1 W_{T-t}^1 + \sigma_2 W_{T-t}^2 > \ln(H / (nS_T X_T)) - (r_1 + r_2 - \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{2})(T-t)) = \\ &= e^{-r(T-t)} HP\left(\frac{\sigma_1 W_{T-t}^1 + \sigma_2 W_{T-t}^2}{\sigma_{12} \sqrt{T-t}} > d_1\right) = \\ &= e^{-r(T-t)} HP\left(1 - \left(\frac{\sigma_1 W_{T-t}^1 + \sigma_2 W_{T-t}^2}{\sigma_{12} \sqrt{T-t}} \leq d_1\right)\right) = \\ &= e^{-r(T-t)} H(1 - N(d_1)) \end{aligned}$$

其中 $d_1 = \frac{\ln(H / (nS_T X_T)) - (r_1 + r_2 - \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{2})(T-t)}{\sigma_{12} \sqrt{T-t}}$.

对于 II :

$$E \{ S_T X_T I_{\{nS_T X_T > H\}} \} = E \{ S_t e^{(r_1 - \frac{\sigma_1^2}{2})(T-t) + \sigma_1 W_{T-t}^1} X_t I_{\{nS_T X_T > H\}} \} =$$

$$S_t e^{r_1(T-t)} E^P e^{-\frac{\sigma_1^2}{2}(T-t) + \sigma_1 W_{T-t}^1} X_t I_{\{nS_T X_T > H\}} =$$

$$S_t e^{r_1(T-t)} E^P e^{(r_1 + r_2 - \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{2})(T-t) + \sigma_1 W_{T-t}^1 + \sigma_2 W_{T-t}^2} I_{\{nS_T X_T > H\}} =$$

(利用引理 2.3 和式(3))

$$\begin{aligned}
& S_t e^{r_1(T-t)} E^Q X_t e^{(r_2 - \frac{\sigma_2^2}{2} + \rho\sigma_1\sigma_2)(T-t) + \sigma_2 W_{T-t}^{2Q}} I_{(nS_t e^{(r_1 + \frac{\sigma_1^2}{2})(T-t) + \sigma_1 W_{T-t}^{1Q}} X_t e^{(r_2 - \frac{\sigma_2^2}{2} + \rho\sigma_1\sigma_2)(T-t) + \sigma_2 W_{T-t}^{2Q}} > H)} = \\
& S_t e^{(r_1 + r_2 + \rho\sigma_1\sigma_2)(T-t)} E^Q X_t e^{(-\frac{\sigma_2^2}{2}(T-t) + \sigma_2 W_{T-t}^{2Q}} I_{(nS_t e^{(r_1 + \frac{\sigma_1^2}{2})(T-t) + \sigma_1 W_{T-t}^{1Q}} X_t e^{(r_2 - \frac{\sigma_2^2}{2} + \rho\sigma_1\sigma_2)(T-t) + \sigma_2 W_{T-t}^{2Q}} > H)} = \\
& S_t X_t e^{(r_1 + r_2 + \rho\sigma_1\sigma_2)(T-t)} E^R I_{(nS_t e^{(r_1 + \frac{\sigma_1^2}{2} + \rho\sigma_1\sigma_2)(T-t) + \sigma_1 W_{T-t}^{1R}} X_t e^{(r_2 + \frac{\sigma_2^2}{2} + \rho\sigma_1\sigma_2)(T-t) + \sigma_2 W_{T-t}^{2R}} > H)} = \\
& S_t X_t e^{(r_1 + r_2 + \rho\sigma_1\sigma_2)(T-t)} P(nS_t e^{(r_1 + \frac{\sigma_1^2}{2} + \rho\sigma_1\sigma_2)(T-t) + \sigma_1 W_{T-t}^{1R}} X_t e^{(r_2 + \frac{\sigma_2^2}{2} + \rho\sigma_1\sigma_2)(T-t) + \sigma_2 W_{T-t}^{2R}} > H) = \\
& S_t X_t e^{(r_1 + r_2 + \rho\sigma_1\sigma_2)(T-t)} P(\sigma_1 W_{T-t}^{1R} + \sigma_2 W_{T-t}^{2R} > \ln(H/(nS_t X_t)) - (r_1 + r_2 + \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{2} + 2\rho\sigma_1\sigma_2)(T-t)) = \\
& S_t X_t e^{(r_1 + r_2 + \rho\sigma_1\sigma_2)(T-t)} P((\sigma_1 W_{T-t}^{1R} + \sigma_2 W_{T-t}^{2R})/(\sigma_{12} \sqrt{T-t}) > d_2) = \\
& S_t X_t e^{(r_1 + r_2 + \rho\sigma_1\sigma_2)(T-t)} N(-d_2) \\
& (\text{同理可知 } \sigma_1 W_{T-t}^{1R} + \sigma_2 W_{T-t}^{2R})/(\sigma_{12} \sqrt{T-t}) \sim N(0,1))
\end{aligned}$$

$$\text{其中 } d_2 = \frac{\ln(H/(nS_t X_t)) - (r_1 + r_2 + \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{2} + 2\rho\sigma_1\sigma_2)(T-t)}{\sigma_{12} \sqrt{T-t}},$$

$$\text{从而 } \Pi = ne^{-r(T-t)} E \{ S_T X_T I_{(nS_t X_t > H)} \} = nS_t X_t e^{(r_1 + r_2 + \rho\sigma_1\sigma_2 - r)(T-t)} N(-d_2).$$

由上述可知 t 时刻该可转债价值

$$V(t, S_t, X_t) = e^{-r(T-t)} HN(d_1) + nX_t S_t e^{a(T-t)} N(-d_2),$$

其中 a, d_1, d_2 如前所述,定理得证。

5 结束语

目前,我国的可转债市场刚刚起步,在交易品种、条款设计等方面与其他国家市场还有一定的差距,为了更好的利用这一新型的融资投资渠道,可在不同的融资环境中设计具有不同条款的可转债形式,以期我国的上市企业筹资提供一种新思路。

参考文献:

- [1] 约翰·赫尔. 期权、期货和其它衍生产品[M]. 北京: 华夏出版社, 2000.
- [2] 刘立喜. 可转债公司债券[M]. 上海: 上海财经大学出版社, 1999.
- [3] 张波. 应用随机过程[M]. 北京: 中国人民大学出版社, 2001: 150 - 157.
- [4] Marek Musiela, Marek Rutkowski, Martingale Methods in Financial Modeling[M]. 北京: 世界图书出版公司, 2003: 459 - 467.
- [5] 陈松男. 金融工程学[M]. 上海: 复旦大学出版社, 2002: 121 - 122.

The Martingle Method of Foreign Currency Underlying Convertible Bond pricing

ZHANG Jiang - hong¹, YANG Shan - chao²

(1. Department of Mathematics Science, XianYang Normal University, Shanxi Xianyang 712000, China;
2. Department of Mathematics Science, Guangxi Normal University, Guangxi Guilin 541004, China)

Abstract Convertible bond is a kind of financial derivative instrument with fund raising and risk avoiding functions, which is novel and unfamiliar in our country. The paper has put forward a kind of convertible bond form which is similar to the B-share convertible bond in view of the financial instruments shortage in our capital market, and planed to raise the fund through the international capital market in order to widen enterprises' financing channel, and utilized martingle method to provide its value formula.

Keywords Convertible bond; option; sell back; Girsanov vary

万方数据