第 20 卷 第 1 期 盐城工学院学报(自然科学版) Vol. 20 No. 1
2007 年 03 月 Journal of Yancheng Institute of Technology Natural Science Edition Mar. 2007

矩阵 Hadamard 乘积的一些性质*

武传东,薛善增
(重庆大学 数理学院,重庆 400044)

摘 要:研究了矩阵 Hadamard 乘积的元素和的性质,得到一系列新的结果. 发现两个矩阵不同,是因为它们之间存在夹角和大小的差异. 找到了矩阵垂直的充要条件,矩阵 Hadamard 乘积的元素和与此矩阵的行列式的关系。

关键词:Hadamard 乘积;元素和;矩阵夹角;矩阵垂直
中图分类号:O152.21 **文献标识码**:A **文章编号**:1671-5322(2007)01-0027-02

矩阵的 Hadamard 乘积具有自然的并行性,已有一些文献研究了它的性质,得到不少结果[1-2]。但对于积的所有元素和的性质却无人研究。因此,本文基于向量观点来研究矩阵的 Hadamard 乘积所有元素和的性质[3-4]。

1 基本概念

定义 1 设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 为任意 n 阶矩阵,我们定义映射 $f:A\to R^n$,即

$$f(A)=(a_{11},a_{12}\cdots,a_{1n}a_{21},a_{22}\cdots a_{n1},\cdots,a_{nn}$$

显然,映射 $f:A\to R^n$ 为 1-1 映射。

定义 2 [4] 设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$,$B=(b_{ij})_{n\times n}$,定义 $A\circ B=(c_{ij})_{n\times n}$,其中 $c_{ij}=a_{ij}b_{ij}$。
我们记 $A\circ A=A^2$

定义 3 设 $A\circ B=(c_{ij})_{n\times n}$,称 $A\circ B$ 中所有元素之和为矩阵 Hadamard 乘积的元素和,记作 $S(A\circ B)$。

根据以上定义,我们发现有如下关系式:

$$S(A\circ B)=f(A)\cdot f(B)$$

定义 4 若 $f(A)$ 与 $f(B)$ 的夹角为 θ,则 θ 称为矩阵 A 与矩阵 B 的夹角,记作 $\langle A,B\rangle=\theta$。

此定义告诉我们,两个矩阵不同,是因为它们之间存在夹角和大小的差异。

定义 5 若矩阵 A 与矩阵 B 的夹角为 $\frac{\pi}{2}$,称矩阵 A 垂直于矩阵 B,记作 $A\perp B$。

2 主要结果

定理 1 设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 为任意 n 阶矩阵,则

$$|f(A)|=\sqrt{S(A^2)}$$

证明:因为 $f(A)=(a_{11},a_{12}\cdots,a_{1n},a_{21},\cdots a_{n1},\cdots,a_{nn})$

所以 $|f(A)|=$

$$\sqrt{a_{11}{}^2+a_{12}{}^2+\cdots+a_{1n}{}^2+a_{21}{}^2+a_{22}{}^2+\cdots+a_{n1}{}^2+\cdots+a_{nn}{}^2}=\sqrt{S(A\circ A)}=\sqrt{S(A^2)}$$

定理 2 设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$,$B=(b_{ij})_{n\times n}$,则

$$S^2(A\circ B)\leqslant S(A^2)S(B^2)$$

证明:因为 $f(A)\cdot f(B)=|f(A)|\cdot|f(B)|\cdot\cos\theta$(其中 θ 为矩阵 A 与矩阵 B 的夹角)

所以 $|f(A)\cdot f(B)|\leqslant|f(A)|\cdot|f(B)|$

即 $|S(A\circ B)|\leqslant\sqrt{S(A^2)}\cdot\sqrt{S(B^2)}$

两边平方得 $S^2(A\circ B)\leqslant S(A^2)S(B^2)$

定理 3 设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$,$B=(b_{ij})_{n\times n}$ 为 n 阶非零矩阵,则 $A\perp B$ 的充要条件为 $S(A\circ B)=0$。

证明:必要性. 因为 $A\perp B$,则 $f(A)$ 与 $f(B)$ 的夹角为 $\frac{\pi}{2}$

所以 $S(A\circ B)=f(A)\cdot f(B)=|f(A)|\cdot|f(B)|\cdot\cos\theta=0$

* 收稿日期:2006-12-20
作者简介:武传东(1979-),男,山东东平人,硕士研究生,主要研究方向为经济数学模型及软件工程。

充分性 因为 $S(A \circ B) = 0$

所以 $S(A \circ B) = f(A) \cdot f(B) = |f(A)| \cdot |f(B)| \cdot \cos\theta = 0$

又因为 $A = (a_{ij})_{n\times n}$，$B = (b_{ij})_{n\times n}$ 为 n 阶非零矩阵，则 $|f(A)| \neq 0$，$|f(B)| \neq 0$

只能 $\cos\theta = 0$ 所以 $\theta = \frac{\pi}{2}$

从而 $A \perp B$

定理 4 （1）若 A，B 正线性相关时，即 $B = kA$，$k > 0$ 时，有

$$S(A \circ B) = \sqrt{S(A^2)} \cdot \sqrt{S(B^2)}$$

（2）若 A，B 负线性相关时，即 $B = kA$，$k < 0$ 时，有

$$S(A \circ B) = -\sqrt{S(A^2)} \cdot \sqrt{S(B^2)}$$

证明：（1）因为 $f(A) \cdot f(B) = |f(A)| \cdot |f(B)| \cdot \cos\theta$（其中 θ 为矩阵 A 与矩阵 B 的夹角）

当 A，B 正线性相关时，$\theta = 0$

所以 $S(A \circ B) = f(A) \cdot f(B) = |f(A)| \cdot |f(B)|$

即 $S(A \circ B) = \sqrt{S(A^2)} \cdot \sqrt{S(B^2)}$

（2）当 A，B 负线性相关时，$\theta = \pi$

所以 $S(A \circ B) = f(A) \cdot f(B) = |f(A)| \cdot |f(B)|$

即 $S(A \circ B) = -\sqrt{S(A^2)} \cdot \sqrt{S(B^2)}$

定理 5 设 $A = (a_{ij})_{n\times n}$，$B = (b_{ij})_{n\times n}$ 为 n 阶非零矩阵，有 $\cos\langle A, B\rangle = \dfrac{S(A \circ B)}{\sqrt{S(A^2)} \cdot \sqrt{S(B^2)}}$

证明：由以上定义容易证明。

定理 6 矩阵 Hadamard 乘积的元素和满足下列运算规律：

（1）交换律 $S(A \circ B) = S(B \circ A)$

（2）结合律 $S[(A \circ B) \circ C] = S[A \circ (B \circ C)]$

（3）分配律 $S[(A + B) \circ C] = S(A \circ C + S(B \circ C)$

证明：由矩阵 Hadamard 乘积的性质容易得到[4]。

定理 7 设 $A = (a_{ij})_{n\times n}$ 为任意 n 阶矩阵，有 $S(A \circ (A^*)^T) = n|A|$

证明：设 $A = (a_{ij})_{n\times n}$ 为元素 a_{ij} 的代数余子式，则

$$A \circ (A^*)^T) = (a_{ij}A_{ij}),$$

由行列式的性质知 (a_{ij}) 的各行元素均为 $|A|$

所以 $S(A \circ (A^*)^T) = n|A|$

参考文献：

[1] 张禾瑞，郝炳新. 高等代数[M]. 第 3 版. 北京：高等教育出版社，1993.

[2] 同济大学应用数学系，高等数学[M]. 第 5 版. 北京：高等教育出版社，2004.

[3] 贾正华. Hadamard 乘积矩阵的一些性质[J]. 工科数学，1998，14(3)：150－154.

[4] 薛长峰. 矩阵的 Hadamard 乘积[J]. 盐城工学院学报，2003，16(3)：50－51.

Hadamard Multiplication of Matrix

WU Chuan－dong，XUE Shan－zeng

（College of Mathmatics and Science，Chongqing University，Chongqing 400044，China）

Abstract：This paper studied the characteristics of the sum of element for matrix Hadamard product and got a series of new findings. The discovery was that there were differences between two matrixes because of the diversities in intersection angle and magnitude. The sufficient and necessary condition for matrix perpendicularity and the relationship between the sum of element for matrix Hadamard product and the determinant for this matrix was also found.

Keywords：hadamard multiplication；entries sum；matrix nipangle；matrix perpendicularity