

# 基于线性矩阵不等式设计非线性系统的 模糊控制器与观测器

李亚钊, 杨成功

(中国电子科技集团公司第28研究所第1研究部, 江苏南京 210007)

**摘要:**用并行分配补偿器的概念设计了用T-S(Takagi-Sugeno)模糊模型表示的非线性系统的模糊控制器与模糊观测器,并导出了用线性矩阵不等式表示的系统二次稳定的条件,通过对倒立摆在不同的初始条件下的仿真试验证明了方法的有效性。

**关键词:**线性矩阵不等式;T-S模糊模型;二次稳定性

**中图分类号:** TN955 **文献标识码:** A **文章编号:** 1671-5322(2007)03-0011-05

自 Takagi 和 Sugeno 提出 T-S 模糊模型以来<sup>[1]</sup>,许多学者都致力于研究用 T-S 模糊模型表示的非线性系统的控制问题,并取得了丰硕的成果<sup>[2]</sup>。T-S 模糊模型的主要思想是将非线性系统在其状态空间的某些区域进行线性化,通过模糊隶属函数将这些线性时不变模型进行合成,用合成后的模型对非线性系统进行逼近<sup>[1,3]</sup>。然而在实际的工程应用中,系统的状态并不容易获取,在这种情况下,可通过模糊观测器观测系统在一段时间内对某些输入的响应,估计系统的状态向量。本文运用模糊观测器的概念与设计方法设计了模糊控制器,并将系统的稳定性条件转换为求解一个满足线性矩阵不等式组的公共矩阵 P。

## 1 T-S 模糊模型

T-S 模糊模型是一种本质上的非线性模型,适宜表达复杂系统的动态特性。m 个输入、单个输出的系统可以由如下形式的 n 条模糊规则组成的集合来表示<sup>[1]</sup>:

$R^i$ : if  $x_1$  is  $A_1^i, x_2$  is  $A_2^i, \dots, x_m$  is  $A_m^i$ , then  $y^i = p_0^i + p_1^i x_1 + p_2^i x_2 + \dots + p_m^i x_m$

由于其结论是采用线性方程式描述的,因此便于用传统的控制理论来设计相关的控制器。

考虑如下的非线性系统

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x(t), u(t)) \\ y(t) &= h(x(t)) \end{aligned} \quad (1)$$

其中  $\dot{x}(t) \in R^n$  是系统的状态向量,  $u(t) \in R^m$  是系统的控制向量,  $y(t) \in R^q$  是系统的输出向量,  $f(x, u), h(x)$  是非线性函数,式(1)是一个非线性系统且很难设计一个全局的控制率,而 T-S 模糊模型可以有效的表述一个复杂的非线性系统。T-S 模糊模型的主要特征是可以用一个线性系统来表示每条模糊规则的局部动态特性,全局的模糊模型可以通过模糊合成各个线性系统得到,并且已经证明该全局的 T-S 模糊模型是一个万能的逼近器。

令  $R^i$  表示第 i 条规则,它可用如下形式给出:

if  $z_1(t)$  is  $M_{1i}$  and  $\dots$  and  $z_p(t)$  is  $M_{pi}$  then

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_i x(t) + B_i u(t) \\ y(t) = C_i x(t) \end{cases} \quad i = 1, 2, 3, \dots, r$$

其中 r 是规则数;  $A_i \in R^{n \times n}, B_i \in R^{n \times m}, C_i \in R^{q \times n}, z_1(t), z_2(t), \dots, z_p(t)$  是已知的观测值,  $M_{ij}$  是相应的观测变量的模糊集。

对于给定的  $(x(t), u(t))$ , 则模糊系统可以用如下的形式表示

$$\dot{x}(t) = \frac{\sum_{i=1}^r \omega_i(z(t)) \{A_i x(t) + B_i u(t)\}}{\sum_{i=1}^r \omega_i(z(t))} =$$

收稿日期:2007-05-17

作者简介:李亚钊(1980-),男,河南商丘人,硕士,工程师,主要研究方向为雷达数据处理及系统仿真。

$$\sum_{i=1}^r h_i(z(t)) \{A_i x(t) + B_i u(t)\} \quad (2)$$

$$y(t) = \frac{\sum_{i=1}^r \omega_i(z(t)) C_i x(t)}{\sum_{i=1}^r \omega_i(z(t))} \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) C_i x(t) \quad (3)$$

其中  $z(t) = (z_1(t), z_2(t), \dots, z_p(t))$ ,  $\omega_i(t) =$

$$\prod_{j=1}^p M_{ij}(z_j(t)), h_i(z(t)) = \frac{\omega_i(z(t))}{\sum_{i=1}^r \omega_i(z(t))} \quad (4)$$

对于所有的  $t$ ,  $M_{ij}(z_j(t))$  表示  $z_j(t)$  隶属于  $M_{ij}$  的隶属度。

由于

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^r \omega_i(z(t)) > 0 \\ \omega_i(z(t)) \geq 0 \end{cases} \quad (5)$$

所以

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) = 1 \\ h_i(z(t)) \geq 0 \end{cases} \quad (6)$$

对于所有的  $t$  都成立。

## 2 模糊控制器的设计

Kang 与 Sugeno 提出了并行分配补偿器(parallel distributed compensation)的概念<sup>[4]</sup>,在并行分配补偿器的设计过程中,每一条控制规则对应于相应 T-S 模糊模型的规则,它们共用模糊模型的观测变量的模糊集,对于系统(1)我们可以构造如下的模糊控制器:

$R_i^c$ : if  $z_1(t)$  is  $M_{i1}$  and ...and  $z_p(t)$  is  $M_{ip}$  then  $u(t) = -F_i x(t)$

模糊控制规则是观测变量的线性函数,全局的模糊控制器可以表示成

$$u(t) = - \frac{\sum_{i=1}^r \omega_i(z(t)) F_i x(t)}{\sum_{i=1}^r \omega_i(z(t))} = - \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) F_i x(t) \quad (7)$$

注意到式(7)是一个非线性函数,则模糊控制器的设计就转化为确定观测变量部分的局部反馈增益矩阵  $F_i$ 。

将式(7)代入到式(2)中可以得到

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t)) h_j(z(t)) \{A_i - B_i F_j\} x(t) \quad (8)$$

记  $G_{ij} = A_i - B_i F_j$ , 则式(8)可重写为如下的形式:

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t)) h_j(z(t)) G_{ij} x(t) + 2 \sum_{i=1}^{r-1} \sum_{i < j} h_i(z(t)) h_j(z(t)) \left\{ \frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} \right\} x(t) \quad (9)$$

定理 1: 如果存在一个公共的正定矩阵  $P$  和一个正的常数  $\alpha$  使得下面的不等式组成立

$$G_{ii}^T P + P G_{ii} + \alpha P < 0 \quad (10)$$

$$\left\{ \frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} \right\}^T P + P \left\{ \frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} \right\} + \alpha P < 0 \quad (11)$$

$$i < j \text{ s.t. } h_i \cap h_j \neq \emptyset$$

则由式(9)描述的连续模糊控制系统的平衡点是全局渐近稳定的。

证明: 考虑候选的 Lyapunov 函数  $V(x(t)) = x^T(t) P x(t)$ , 其中  $P > 0$ , 则

$$\dot{V}(x(t)) = \dot{x}(t) P x(t) + x^T(t) P \dot{x}(t) =$$

$$\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t)) h_j(z(t)) x^T(t) [(A_i - B_i F_j)^T P +$$

$$P(A_i - B_i F_j)] x(t) = \sum_{i=1}^r h_i^2(z(t)) x^T(t)$$

$$[G_{ii}^T P + p G_{ii}] x(t) + \sum_{i=1}^{r-1} \sum_{i < j} 2 h_i(z(t)) h_j(z(t)) x^T x$$

$$\left[ \left\{ \frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} \right\}^T P + P \left\{ \frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} \right\} \right] x(t)$$

由式(10)和(11)可知, 当  $x(t) \neq 0$  时  $\dot{V}(x(t)) = -3\alpha V(x(t)) < 0$ 。

式(10)和(11)不是关于  $F_i$  和  $P$  的公共凸函数, 在不等式的两边同时乘以  $P^{-1}$  并定义一个新的变量  $X = P^{-1}$ , 可以将式(10)和式(11)重写为如下的形式

$$X A_i^T + A_i X - X F_i^T B_i^T - B_i F_i X + \alpha X < 0 \quad (12)$$

$$X A_i^T + A_i X + X A_j^T + A_j X - X F_i^T B_i^T - B_i F_i X - X F_j^T B_j^T - B_j F_j X + 2\alpha X < 0 \quad (13)$$

定义  $M_i = F_i X$ , 对于  $X > 0$ , 我们有  $F_i = M_i X^{-1}$ , 将其代入上面的不等式, 可以得到:

$$X A_i^T + A_i X - M_i^T B_i^T - B_i M_i + \alpha X < 0 \quad (14)$$

$$X A_i^T + A_i X + X A_j^T + A_j X - M_i^T B_i^T - B_i M_i -$$

$$M_j^T B_j^T - B_j M_j X + 2\alpha X < 0$$

$$i < j \text{ s.t. } h_i \cap h_j \neq \emptyset \quad (15)$$

上面的条件是关于  $X$  和  $M_i$  的线性矩阵不等式, 我们可以找到一个正定的矩阵  $X$  和  $M_i$  满足

线性矩阵不等式或者证明不存在这样的  $X$  和  $M_i$ , 则系统的反馈增益阵  $F_i$  和公共的矩阵  $P$  可以用下式确定

$$P = X^{-1}, F_i = M_i X^{-1}$$

### 3 模糊观测器设计

在实际的工程实践中,不易获得系统的全部信息,在这种情况下,有必要设计一个模糊观测器来估计 T-S 模型的状态向量。

与所有的观测器设计一样,模糊观测器<sup>[5]</sup>需满足如下条件

$$x(t) - \hat{x}(t) \rightarrow 0 \text{ as } t \rightarrow \infty$$

其中  $\hat{x}(t)$  表示用模糊观测器获得的状态向量的估计值,这个条件保证了  $x(t)$  与  $\hat{x}(t)$  之间的稳态误差收敛到 0。通过运用并行分配补偿器的设计方法我们构造如下形式的模糊观测器:

$$R_0^i: \text{ if } z_1(t) \text{ is } M_{i1} \text{ and } \dots \text{ and } z_p(t) \text{ is } M_{ip} \text{ then}$$

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = A_i \hat{x}(t) + B_i u(t) + K_i (y(t) - \hat{y}(t)) \\ \hat{y}(t) = C_i \hat{x}(t) \end{cases}$$

其中  $K_i (i=1, 2, \dots, r)$  是模糊观测器的局部增益阵,  $\hat{x}(t)$  是估计的状态向量,  $\hat{y}(t)$  是模糊观测器的输出。

全局的模糊观测器可以写成如下形式

$$\dot{\hat{x}}(t) = \frac{\sum_{i=1}^r \omega_i(z(t)) \{A_i \hat{x}(t) + B_i u(t) + K_i (y(t) - \hat{y}(t))\}}{\sum_{i=1}^r \omega_i(z(t))} \quad (16)$$

$$\hat{y}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) C_i \hat{x}(t) \quad (17)$$

则模糊观测器的设计就转化为确定前件部分的局部反馈增益矩阵  $K_i$ 。

全局的模糊控制器可以表示成

$$u(t) = - \frac{\sum_{i=1}^r \omega_i(z(t)) F_i \hat{x}(t)}{\sum_{i=1}^r \omega_i(z(t))} - \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) F_i \hat{x}(t) \quad (18)$$

将式(16)和(17)结合起来,并且记

$e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ , 可将系统用下面的式子表示

$$\dot{\hat{x}}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) A_i \hat{x}(t) -$$

$$\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t)) h_j(z(t)) B_j F_j \hat{x}(t) \quad (19)$$

$$\dot{\hat{x}} = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t)) h_j(z(t)) (A_i - B_j F_j) \hat{x}(t) + \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t)) h_j(z(t)) K_j C_j e(t) \quad (20)$$

$$\dot{e}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t)) h_j(z(t)) (A_i - K_j C_j) e(t) \quad (21)$$

式(21)还可以写成

$$\dot{e}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t)) h_j(z(t)) G_{ij} e(t) + 2 \sum_{i=1}^{r-1} \sum_{j=1}^i h_i(z(t)) h_j(z(t)) \left( \frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} \right) e(t) \quad (22)$$

其中  $G_{ij} = A_i - K_j C_j$

定理 2: 如果存在一个公共的正定矩阵  $P$  和一个正的常数  $\beta$  使得下面的不等式组成立

$$G^{Tij} Q + Q G_{ij} + \beta Q < 0$$

$$\left( \frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} \right)^T + Q \left( \frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} \right) + \beta Q < 0$$

$$i < j \text{ s.t. } h_i \cap h_j \neq \phi \quad (23)$$

则由式(21)描述的系统的平衡点是全局渐近稳定的。

证明: 与定理 1 的证明类似, 略。

将上面的不等式组表示成线性矩阵不等式, 令  $S_i = Q K_i$

$$A_i^T Q + Q A_i - C_i^T S_i^T - S_i C_i + \beta Q < 0 \quad (24)$$

$$A_i^T Q + Q A_i + A_j^T Q + Q A_j - C_i^T S_j^T - S_j C_i - C_j^T - S_i^T - S_i C_i + 2\beta Q < 0$$

$$i < j \text{ s.t. } h_i \cap h_j \neq \phi \quad (25)$$

上面的条件是关于  $Q$  和  $S_i$  的线性矩阵不等式, 可以找到一个正定的矩阵  $Q$  和  $S_i$  满足线性矩阵不等式或者证明不存在这样  $Q$  和  $S_i$ , 则系统的反馈增益阵  $K_i$  和公共的矩阵  $Q$  可以用下式确定

$$K_i = Q^{-1} S_i$$

### 4 仿真试验

倒立摆的控制是控制领域中的基准问题, 为了验证所设计算法的有效性, 可考虑倒立摆的平衡问题, 倒立摆<sup>[6]</sup>的运动方程可以用下式表示:

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = \frac{g \sin x_1(t) - a m l x_2^2 \sin 2x_1(t) / 2 - a \cos x_1(t) u(t)}{4l/3 - a m l \cos^2 x_1(t)} \quad (26)$$

其中  $x_1(t)$  为偏离竖直方向的角度(rad),  $x_2(t)$  为角速度,  $g = 9.8 \text{ m/s}^2$  为重力加速度,  $m$  为摆的质量,  $M$  为小车的质量,  $l$  为摆长度的一半,  $u$  为施加的外力( $N$ ),  $a = \frac{1}{M+m}$ , 在仿真中, 我们取  $m = 2.0 \text{ kg}$ ,  $M = 8.0 \text{ kg}$ ,  $2l = 1.0 \text{ m}$ 。

将(26)用 T-S 模型表示, 注意到当  $x_1 = \pm \frac{\pi}{2}$  时系统是不可控的, 我们用两条规则来近似倒立摆系统, 其模糊规则如下:

规则 1: if  $x_1(t)$  is about 0 then

$$\dot{x}(t) = A_1 x(t) + B_1 u(t)$$

$$y_1(t) = C_1(t)$$

规则 2: if  $x_1(t)$  is about  $\pm \frac{\pi}{2}$  ( $|x_1| < \pm \frac{\pi}{2}$ ) 0

$$\dot{x}(t) = A_2 x(t) + B_2 u(t)$$

then

$$y_2(t) = C_2(t)$$

其中  $A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{4l/3 - aml} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 17.294 & 0 \end{bmatrix}$ ,

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{a}{4l/3 - aml} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.1765 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{4l/3 - aml} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 9.630 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\alpha\beta}{4l/3 - aml\beta^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.0052 \end{bmatrix}$$

$$C_1 = [1 \ 0], C_2 = [1 \ 0], \beta = 88^\circ$$

规则 1 与规则 2 的隶属函数如图 1 所示。

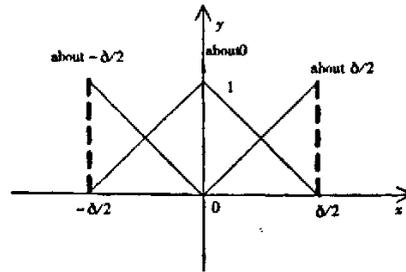


图 1 两规则模型的隶属函数

Fig.1 Membership functions of two rules Model

选取  $\alpha = 10$ , 通过求解线性矩阵不等式, 可以得到

$$P = \begin{bmatrix} 4.8793 & 0.5012 \\ 0.5012 & 0.0670 \end{bmatrix}$$

$$F_1 = [-7366.2 \quad -972.75]$$

$$F_2 = [26277 \quad -3580.7]$$

选取  $\beta = 30$ , 通过求解线性矩阵不等式, 可以得到

$$Q = \begin{bmatrix} 227.56 & -13.589 \\ -13.589 & 6.6953 \end{bmatrix}$$

$$K_1 = \begin{bmatrix} 53.264 \\ 653.98 \end{bmatrix}, K_2 = \begin{bmatrix} 34.921 \\ 329.12 \end{bmatrix}$$

模糊控制器如下:

规则 1: if  $x_1(t)$  is about 0 then  $u(t) = -F_1 \hat{x}(t)$

规则 2: if  $x_1(t)$  is about  $\pm \frac{\pi}{2}$  then  $-F_2 \hat{x}(t)$

则全局的模糊控制器可以写成

$$u(t) = -\mu_1 F_1 \hat{x}(t) - \mu_2 F_2 \hat{x}(t)$$

这里给出了闭环系统在 4 种初始条件  $x_0 = (30^\circ, 0)$   $(45^\circ, 0)$   $(60^\circ, 0)$   $(88^\circ, 0)$  出发所得的仿真结果, 见图 2 ~ 图 5。

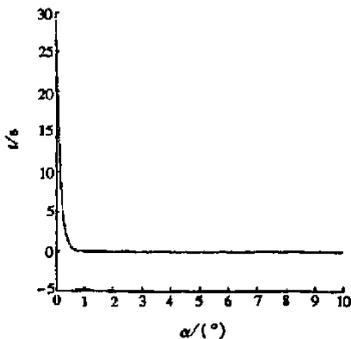


图 2  $x_0 = (30^\circ, 0)$  时的系统响应曲线

Fig.2 System response curve of  $x_0 = (30^\circ, 0)$

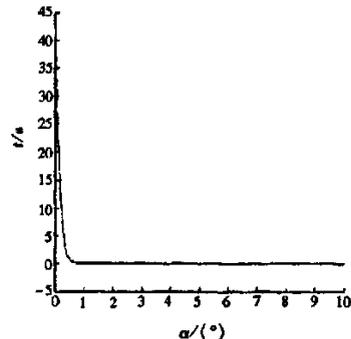
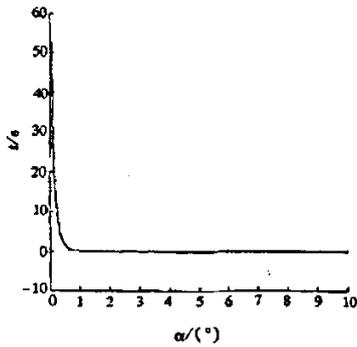


图 3  $x_0 = (45^\circ, 0)$  时的系统响应曲线

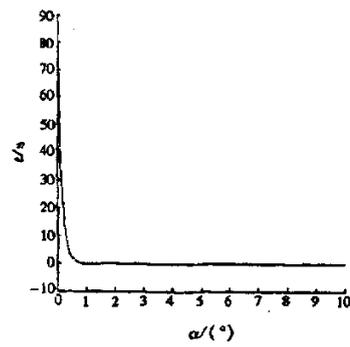
Fig.3 System response curve of  $x_0 = (45^\circ, 0)$

图4  $x_0 = (60^\circ, 0)$ 时的系统响应曲线Fig. 4 System response curve of  $x_0 = (30^\circ, 0)$ 

从仿真的结果可以看出,对于不同的初始状态,模糊控制器能够快速的使倒立摆收敛到平衡状态。

## 5 结论

本文用并行分配补偿器的概念设计了用 T -

图5  $x_0 = (88^\circ, 0)$ 时的系统响应曲线Fig. 5 system response curve of  $x_0 = (88^\circ, 0)$ 

S 模糊模型表示的非线性系统的模糊控制器与模糊观测器,并导出了用线性矩阵不等式表示的系统二次稳定的条件,对倒立摆在不同的初始条件下进行了仿真试验,仿真的结果表明了方法的有效性。

## 参考文献:

- [1] Takagi T, Sugeno M. Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control[J]. IEEE Trans. Syst., Man, Cybern, 1985(15):116-132.
- [2] Friedland B. Advanced control systems Design[M]. Upper Saddle River, NJ: Prentice-Hall, 1996.
- [3] Sugeno M, Kang G T. Structure identification of fuzzy model[J]. fuzzy sets Syst, 1988(28):15-33.
- [4] Sugeno M, Kang G T. Fuzzy Modeling and Control of Multilayer incinerator[J]. Fuzzy sets Syst, 1986(18):329-346.
- [5] Tanaka K, Sano M. On the Concept of Fuzzy Regulators and Fuzzy Observers[J]. Proceedings of Third IEEE International Conference of Fuzzy Systems, 1994(2):767-772.
- [6] Cannon R H. Dynamics of Physical Systems[M]. New York: McGraw-Hill, 1967.

# LMI - based Fuzzy Controller and Observer Design for Nonlinear System

LI Ya-zhao, YANG Cheng-gong

(The first Department of the 28<sup>th</sup> Research Institute of China Electronics Technology Group Corporation, Jiangsu NanJing 210007, China)

**Abstract:** This paper considers the problem of designing a fuzzy observer - based controller for nonlinear systems described by Takagi - Sugeno(T - S) fuzzy model. The concept of parallel and distributed compensation is employed to design fuzzy controller and observer from fuzzy T - S fuzzy models. Stability conditions are derived from quadratic stabilization and linear matrix inequality and the simulation of an inverted pendulum tested the efficiency of the design method.

**Keywords:** linear matrix inequality; T - S model; stability