

矩阵的次O-合同

张艳, 郭东溪

(重庆大学 数理学院信息与计算科学系, 重庆 400044; 山东省济宁市育才中学数学组, 山东 272000)

摘要:结合次合同、O-合同矩阵等概念, 提出新的定义次O-合同。证明了次O-合同是一种等价关系, 同时给出了矩阵A、B次O-合同的充分必要条件, 然后利用次正交矩阵的性质得到次O-合同矩阵的行列式之间的关系。

关键词:全转置; 次转置; 次O-合同; 次正交矩阵

中图分类号: O175.2 **文献标识码:** A **文章编号:** 1671-5322(2007)03-0054-03

线性代数或高等代数都讨论矩阵的转置和合同, 对其他合同的讨论很少。在一些文献中, 出现了讨论次转置、全转置和次合同矩阵。这些在许多领域得到了应用, 而本文从不同的角度研究矩阵, 定义了次O-合同矩阵, 并得到了矩阵次O-合同的等价条件。

1 概念和引理

在同一个数域P中, I_n 为n阶单位矩阵, J_n 为n阶次单位矩阵(次对角线上的元素为1, 其他的元素全为0的n阶矩阵), A^* 为A的伴随矩阵, A^T 为A的转置矩阵, $R^{n \times n}$ 为n阶实矩阵的全体。

定义 1.1 设 $A = (a_{ij})_{n \times n}$, 若

$$B = \begin{bmatrix} a_{nn} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{11} \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} a_{nn} & \cdots & a_{m1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{11} \end{bmatrix}$$

则称B为A的次转置矩阵^[1], 记作 $B = A^{ST}$; 称C为A的全转置矩阵^[2], 记作 $C = A^o$ 。

定义 1.2^[3] 设 $A, B \in R^{n \times n}$, 若存在可逆矩阵 $Q \in R^{n \times n}$, 使得 $B = Q^{ST}AQ$, 则称A与B为次合同, 记作 $A \overset{ST}{\cong} B$ 。

定义 1.3^[3] 设 $A, B \in R^{n \times n}$, 若存在可逆矩阵 $Q \in R^{n \times n}$, 使得 $B = Q^T A Q^o$, 则称A与B为O-合同, 记作 $A \overset{o}{\cong} B$ 。

定义 1.4 设 $A, B \in R^{n \times n}$, 若存在可逆矩阵 $Q \in R^{n \times n}$, 使得 $B = Q^{ST} A Q^o$, 则称A与B为次O-

合同, 记作 $A \overset{so}{\cong} B$ 。

定义 1.5^[4] 设A为n阶实方阵, 如果 $AA^{ST} = A^{ST}A = I_n$, 即 $A^{-1} = A^{ST}$, 则A为n阶次正交矩阵。

容易验证:

引理 1.1 设 $A, B \in R^{n \times n}$, 则

- (1) $A^{oo} = A$; (2) $(A^{ST})^{ST} = A$;
- (3) $(A^{ST})^o = (A^o)^{ST}$; (4) $(A^*)^o = (A^o)^*$;
- (5) $(AB)^o = A^o B^o$; (6) $(AB)^{ST} = B^{ST} A^{ST}$

引理 1.2^[5] 设A是可逆方阵, 则 A^{ST} 是可逆方阵, 且 $(A^{ST})^{-1} = (A^{-1})^{ST}$ 。

引理 1.3 设A是n阶实方阵, 则 $|A| = |A^{ST}| = |A^o|$ 。

引理 1.4^[4] 设A是次正交矩阵, 则 $|A| = 1$ 或 $|A| = -1$ 。

2 主要结论与证明

定理 2.1 次O-合同是等价关系。

证明 设 $A, B, C \in R^{n \times n}$, 则

(1) 由 $A = I_n^{ST} A I_n^o$, 知 $A \overset{so}{\cong} B$;

(2) 设 $A \overset{so}{\cong} B$, 则存在可逆矩阵 $Q \in R^{n \times n}$, 使得 $B = Q^{ST} A Q^o$, 因此

$A = (Q^{ST})^{-1} B (Q^o)^{-1}$, 再由引理 1.1 及引理

1.2 得 $A = (Q^{-1})^{ST} B (Q^{-1})^o$, 即 $B \overset{so}{\cong} A$;

(3) 设 $A \overset{so}{\cong} B, B \overset{so}{\cong} C$, 则存在可逆矩阵 $P, Q \in$

收稿日期: 2007-06-13

作者简介: 张艳(1985-), 女, 山西运城市人, 硕士研究生, 主要研究方向为经济数学模型及软件工程。

$R^{n \times n}$, 使得 $B = P^{ST}AP^O$, $C = Q^{ST}BQ^O$, 因此得 $C = Q^{ST}P^{ST}AP^OQ^O$, 再由引理1得 $C = (PQ)^{ST}A(PQ)^O$, 即 $A \stackrel{SO}{\cong} C$.

定理 2.2 若 $A, B \in R^{n \times n}$, 则 $A \stackrel{SO}{\cong} B \Leftrightarrow A^O \stackrel{SO}{\cong} B^O$.

证明 设 $A \stackrel{SO}{\cong} B$, 则存在可逆矩阵 $Q \in R^{n \times n}$, 使得 $B = Q^{ST}AQ^O$

$$\Leftrightarrow B^O = (Q^{ST}AQ^O)^O$$

$$\Leftrightarrow B = (Q^{ST})^OA^O(Q^O)^O = (Q^O)^{ST}A^O(Q^O)^O$$

$$\Leftrightarrow A^O \stackrel{SO}{\cong} B^O$$

推论 2.1 A 可逆 $\Leftrightarrow A^O$ 可逆 $\Leftrightarrow A^{ST}$ 可逆.

证明 由引理3容易证得.

定理 2.3 (1) 设 $A, B \in R^{n \times n}$ 且可逆, 则 $A \stackrel{SO}{\cong} B \Leftrightarrow A^{-1} \stackrel{SO}{\cong} B^{-1}$.

(2) 设 $A, B \in R^{n \times n}$, 则 $A \stackrel{SO}{\cong} B \Leftrightarrow A^{ST} \stackrel{SO}{\cong} B^{ST} \Leftrightarrow A^* \stackrel{SO}{\cong} B^* \Leftrightarrow A^T \stackrel{SO}{\cong} B^T$.

证明 (1) 设 $A \stackrel{SO}{\cong} B \Leftrightarrow$ 存在可逆矩阵 $Q \in R^{n \times n}$, 使得 $B = Q^{ST}AQ^O$

$$\Leftrightarrow B^{-1} = (Q^{ST}AQ^O)^{-1} \Leftrightarrow B^{-1} = (Q^O)^{-1}A^{-1}(Q^{ST})^{-1}$$

$$\Leftrightarrow B^{-1} = [((Q^{-1})^O)^{ST}]^{ST}A^{-1}[[(Q^{-1})^{ST}]^O]^O$$

$$\Leftrightarrow B^{-1} = [((Q^{-1})^O)^{ST}]^{ST}A^{-1}[[(Q^{-1})^O]^{ST}]^O$$

$$\Leftrightarrow A^{-1} \stackrel{SO}{\cong} B^{-1}.$$

(2) 设 $A \stackrel{SO}{\cong} B \Leftrightarrow$ 存在可逆矩阵 $Q \in R^{n \times n}$, 使得 $B = Q^{ST}AQ^O$

$$\Leftrightarrow B^{ST} = (Q^{ST}AQ^O)^{ST} \Leftrightarrow B^{ST} = (Q^O)^{ST}A^{ST}(Q^{ST})^{ST}$$

$$\Leftrightarrow B^{ST} = (Q^O)^{ST}A^{ST}(Q^O)^O$$

$$\Leftrightarrow A^{ST} \stackrel{SO}{\cong} B^{ST}$$

同理可证 $A \stackrel{SO}{\cong} B \Leftrightarrow A^* \stackrel{SO}{\cong} B^* \Leftrightarrow A^T \stackrel{SO}{\cong} B^T$.

推论 2.2 设 $A \in R^{n \times n}$ 且可逆, 则

$$A \stackrel{SO}{\cong} B \Leftrightarrow A^{-1} \stackrel{SO}{\cong} B^{-1} \Leftrightarrow A^{ST} \stackrel{SO}{\cong} B^{ST} \Leftrightarrow A^* \stackrel{SO}{\cong} B^* \Leftrightarrow A^T \stackrel{SO}{\cong} B^T$$

定理 2.4 若实 n 阶方阵 A 与 n 阶单位阵 E 在实数域上次 O -合同, 则 $|A| > 0$.

证明 因为 A 与 E 次 O -合同, 知 E 与 A 次 O -合同,

所以存在 n 阶可逆矩阵 Q , 使得 $A = Q^{ST}EQ^O = Q^{ST}Q^O$, 将等式两边取行列式, 得 $|A| = |Q^{ST}Q^O| = |Q^{ST}| |Q^O| = |Q|^2 > 0$.

命题 2.1 设 A, B 均是 n 阶方阵, Q 是 n 阶次正交矩阵, 且 $B = Q^{ST}AQ^O$, 则 $|B| = |A|$.

证法 1 因 Q 是 n 阶次正交矩阵, 由引理1.4得 $|Q|^2 = 1$

又因 A 与 B 次 O -合同, 所以 $B = Q^{ST}AQ^O$

将等式两边取行列式, 得 $|B| = |Q^{ST}| |A| |Q^O| = |Q| |A| |Q| = |Q|^2 |A|$

故 $|B| = |A|$.

证法 2 由定义1.5知 $A^{-1} = A^{ST}$

所以 $|B| = |Q^{ST}| |A| |Q^O| = |Q^{-1}| |A| |Q| = |A|$.

命题 2.2 若 A 为 n 阶可逆矩阵, 且 A 与 $-A$ 次 O -合同, 则 n 为偶数.

证明 因 A 与 $-A$ 次 O -合同, 所以存在 n 阶实可逆矩阵 Q , 使得 $-A = Q^{ST}AQ^O$, 从而

$$|-A| = (-1)^n |A| = |Q^{ST}| |A| |Q^O| = |Q|^2 |A|$$

又 A 可逆, 所以 $|A| \neq 0$, 于是 $(-1)^n = |Q|^2 > 0$, 故 n 为偶数.

命题 2.3 设 A, B 为数域 P 上 n 阶矩阵, 则 $A \stackrel{SO}{\cong} B \Leftrightarrow J_n A \stackrel{O}{\cong} J_n B$.

证明 B 与 A 次 O -合同 $\Leftrightarrow$ 存在可逆矩阵 $Q \in R^{n \times n}$, 使 $B = Q^{ST}AQ^O$

即 $J_n Q^T J_n A Q^O = B \Leftrightarrow Q^T J_n A Q^O = J_n B \Leftrightarrow J_n B \stackrel{O}{\cong} J_n A$.

推论 2.3 若 A 为 n 阶矩阵, 则 A^T 与 A^{ST} 次 O -合同.

证明 因有可逆阵 J_n 使得 $A^{ST} = J_n A^T J_n = J_n^{ST} A^T J_n^O$.

定理 2.5 (1) 设 A 是可逆对称矩阵, 则 $A^{-1} \stackrel{O}{\cong} A^O$.

(2) 设 A 是可逆次对称矩阵, 则 $A^{-1} \stackrel{SO}{\cong} A^O$

证明 (1) A 是可逆对称矩阵 $\Rightarrow A = A^T \Rightarrow A^O = A A^{-1} A^O = A^T A^{-1} A^O \Rightarrow A^{-1} \stackrel{O}{\cong} A^O$.

(2) A 是可逆次对称矩阵 $\Rightarrow A = A^{ST} \Rightarrow A^O = A A^{-1} A^O = A^{ST} A^{-1} A^O \Rightarrow A^{-1} \stackrel{SO}{\cong} A^O$.

参考文献:

- [1] 卢业广. 次对称矩阵和次正交矩阵[J]. 大学数学, 1989(1): 13 - 16.
- [2] 许永平, 石小平. 正交矩阵的充要条件与 O - 正交矩阵的性质[J]. 南京林业大学学报, 2005(3): 29 - 31.
- [3] 许永平, 胡卫群. 矩阵的 O - 相似与 O - 合同[J]. 南京林业大学学报, 2006(7): 30 - 4.
- [4] 刘丽萍. 次正交矩阵及其性质[J]. 山西财经大学学报, 2006(6): 22 - 23.
- [5] Johnson C R Positive definite matrices[J]. Amer Math Monthly, 1970, 77: 259 - 264.

O - Subcongruent of Matrices

ZHANG Yan, GUO Dong-xi

(College of Mathematics and Science, Chongqing University, Chongqing 400044, China;
Yucui High School, Shandong Jinan 272000, China)

Abstract: In this paper, O - subcongruent of matrices was introduced by the concepts of sub - congruent and O - congruent. The fact that O - subcongruent is a kind of equivalent relation was proved. Meanwhile, this paper also gave some necessary and sufficient conditions for O - subcongruent of matrices. Then by the properties of sub - orthogonal matrix, the relations of their determinant were gained.

Keywords: full - transposed; sub - transposed; O - subcongruent; sub - orthogonal matrix

(上接第 53 页)

参考文献:

- [1] 何东健. 数字图像处理[M]. 西安: 西安电子科技大学出版社, 2003.
- [2] 张晔, 陈刚. 基于偏微分方程的图像处理[M]. 北京: 高等教育出版社, 2004.
- [3] Perona, Malik. Scale space and edge detection using anisotropic diffusion. Proc. IEEE Computer Society[M]. Workshop on Computer Vision, 1987.
- [4] Chen Y, Barcelos C A Z, Mair B A. Smoothing and Edge Detection by Time - Varying Coupled Nonlinear Diffusion Equation[J]. Computer Vision and Image Understanding archive, 2001, 82(2): 1147 - 1163.

A Theoretical Research of PDE Model Based on Anisotropic Diffusion

LIU Gui-lan

(Department of Basic Sciences, Yancheng Institute of Technology, Jiangsu Yancheng 224003, China)

Abstract: Based on the classical model of P. L. Lions, the article presented a new nonlinear PDE model with time - delay effect in denoising of image processing. Different from the previous model, the article also yield a new simple and effective method in image denoising. For the new model, the existence and uniqueness of a solution to the model was verified, which provides the theoretical basis for the coming numerical experiments.

Keywords: Perona - Malik's model; partial differential equation; denoising of image processing; time - delay equation