与分担值有关的正规定则

田　保,田宏根
(新疆师范大学 数理信息学院,新疆 乌鲁木齐　830054)

摘要:设 F 为单位圆盘上的一族亚纯函数,a 非零有穷复数,k 为任一正整数,若对每一 $f\in F$,f 零点的重数 $\geq k+1(k\geq 2)$,极点重数 ≥ 2,f' 和 $f^{(k)}$ IM 分担值 a,则 F 在单位圆盘上正规。

关键词:亚纯函数;分担值;正规定则
中图分类号:O174.52　　**文献标识码**:A　　**文章编号**:1671-5322(2007)03-0057-02

1　正规定则定理的提出与分担值有关的主要结果

设 f,g 为区域 D 上两非常数亚纯函数,a 为任一有穷复数,如果 $f-a$ 和 $g-a$ 的零点相同(不计重数)就称 f,g 分担值 aIM。

W. Schwick 首先讨论了涉及分担值的正规定则,得到:

定理 1[1]　设 F 为单位圆盘 Δ 上的亚纯函数,a_1,a_2,a_3 为互相判别的有限复数,若对任意 $f\in F$,a_1,a_2,a_3 为 f 与 f' 的 IM 分担值,则 F 在 Δ 上正规。

2000 年,庞学城把此定理推广为:

定理 2[2]　设 F_m 为区域 G 上的亚纯函数族,a_1,a_2 为两个互相判别的有限复数,若对任意 $f\in F_m$,a_1,a_2 为 f 与 f' 的 IM 分担值,则 F_m 在 G 上正规。

对此结论,陈怀惠与华韵厚得到:

定理 3[3]　设 F 为区域 G 上的亚纯函数族,a 为有穷非零复数,若对任意 $f\in F$,a 为 f,f' 与 f'' 在 G 上的 IM 分担值,则 F 在 G 上正规。

于是一个很自然的问题就是如果用 $f^{(k)}$ 代替 f',上述定理是否任成立呢? 然而用 $f^{(k)}(k\geq 2)$ 代替 f',定理 2 是不成立的,本文把定理 1,2,3 的条件改进推广得到:

定理 4　设 F 为单位圆盘上的一族亚纯函数,a 非零有穷复数,k 为任一正整数,若对每一 $f\in F$,f 零点的重数 $\geq k+1(k\geq 2)$,极点重数 ≥ 2,f' 和 $f^{(k)}$ IM 分担值,则 F 在单位圆盘上正规。

2　主要引理

引理 1[4]　设 F 为单位圆 Δ 上的亚纯函数族,k 为一正整数,若对任意 $f\in F$,f 的零点重数 $\geq p$,极点重数 $\geq q$,若 F 在 D 上不正规,则对于 $-q<a<p$,存在

(1)实数 r,$r\in(0,1)$,

(2)一个点列 z_n,$|z_n|<r$

(3)一个函数列 f_n,$fn\in F$

(4) 正数列 ρ_n,$\rho_n\to 0$

使得 $g_n(\xi)=\rho_n^{-a}f_n(z_n+\rho_n\xi)$ 在复平面 C 上按照球面距离内闭一致收敛于非常数亚纯函数 $g(\xi)$,$g(\xi)$ 的级不超过 2 且 $g(\xi)$ 的零点重数 $\geq p$,极点重数 $\geq q$。

引理 2[5]　设 $f(z)$ 为一有穷级亚纯函数,k 为一正整数,b 为一非零的复数,如果 $f(z)$ 的零点重数 $\geq k+1$,极点重数 ≥ 2,$f^{(k)}(z)\neq b$,则 $f(z)$ 是一常数。

3　定理 4 的证明

假设 F 在 D 上不正规,由引理 1,存在

(1) 实数 r,$r\in(0,1)$,

(2) 一个点列 z_n,$|z_n|<r$

(3) 一个函数列 f_n,$fn\in F$

(4)正数列 ρ_n,$\rho_n\to 0$,

使得 $g_n(\xi)=\rho_n^{-k}f_n(z_n+\rho_n\xi)$(这里取 $\alpha=k$)

收稿日期:2007-07-11
作者简介:田保(1983-),男,安徽安庆人,硕士研究生,主要研究方向为复分析与复方程方向。

在复平面 C 上按照球面距离内闭一致收敛于非常数亚纯函数 $g(\xi)$，$g(\xi)$ 的级不超过 2 且 $g(\xi)$ 的零点重数 $\geqslant k+1$，极点的重数 $\geqslant 2$，则 $g(\xi)$ 满足性质 $g^{(k)}(\xi)\neq a$

假设 ξ_0 存在使得 $g^{(k)}(\xi_0)=a$，可以得出 $g^{(k)}(\xi)$ 不恒等于 a，若 $g^{(k)}(\xi_0)\equiv a$，则 $g(\xi)$ 为一 k 次多项式，这与 $g(\xi)$ 的零点重数 $\geqslant k+1$ 矛盾，所以 $g^{(k)}(\xi_0)=a$，$g^{(k)}(\xi)=a$ 不恒等于 a，则由 Rouche 定理知，存在 $g_n(\xi)$，以及点列 $\{\xi_n\}$，$\xi_n\to\xi_0$，使得 n 充分大时有 $g^{(k)}(\xi_n)=a$，因为 $g_n(\xi)=\rho_n^{-k}f_n(z_n+\rho_n\xi)$，所以 $g^{(k)}(\xi)=f_n^{(k)}(z_n+\rho_n\xi)$，有 $f_n^{(k)}(z_n+\rho_n\xi)=a$，又由定理条件，$f'$ 和 $f^{(k)}$ 分担值 a，所以 $f'_n(z_n+\rho_n\xi_n)=a$，得到 $g(\xi_0)=\lim\limits_{n\to\infty}g_n(\xi_n)$ $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f_n(z_n+\rho_n\xi_n)}{\rho_n^k}$，下面来讨论 $g(\xi_0)$ 的值，

(1) 当 $n\to\infty$，$f_n(z_n+\rho_n\xi)\to b$ (b 为一常数)，

则 $$\lim_{n\to\infty}\frac{f_n(z_n+\rho_n\xi_n)}{\rho_n^k}=\infty$$

(2) 当 $n\to\infty$，$f_n(z_n+\rho_n\xi)\to\infty$，

则 $$\lim_{n\to\infty}\frac{f_n(z_n+\rho_n\xi_n)}{\rho_n^k}=\infty$$

(3) 当 $n\to\infty$，$f_n(z_n+\rho_n\xi)\to 0$，由洛比塔法则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f_n(z_n+\rho_n\xi_n)}{\rho_n^k}=\lim_{n\to\infty}\frac{f'_n(z_n+\rho_n\xi_n)}{k\rho_n^{k-2}}=$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a}{k\rho_n^k}=\infty \quad (因为\ k\geqslant 3)$$

综上所知，ξ_0 为 g 的极点，当然也是 $g^{(k)}$ 的极点，这与 $g^{(k)}(\xi_0)=a$ 矛盾，所以有 $g^{(k)}(\xi)\neq a$。

因为 $g(\xi)$ 的零点重数 $\geqslant k+1$ $(k\geqslant 2)$，极点重数 $\geqslant 2$，$g^{(k)}(z)\neq a$，则由引理 2 知 $g(z)$ 是一常数，这与 $g(\xi)$ 为复平面 C 上非常数亚纯函数矛盾，定理证毕。

参考文献：

[1] Schwick. Sharing values and normality[J]. Arch Math,1992,59:50 – 54.

[2] Pang xuecheng, Lawrence Zalcman. Normality and shared values[J]. Arkiv for Mathematics,2000,38:171 – 182.

[3] Chen H, Hua X. Normal families concerning shared values[J]. Israel J Math,2000,115:355 – 362.

[4] Zalcman L. Normal families: New perspectives[J]. Bull Amer Math Soc,1998,35:215 – 230.

[5] 尚华. 亚纯函数的正规族[J]. 重庆大学学报:自然科学版,2006,29(10):125 – 126.

A Nomoility Criterion Concerning on Shared Values

TIAN Bao, TIAN Hong-gen

(School of Maths – physics and Information Sciences, Xinjiang Normal University, Xinjiang Urumqi 830054, China)

Abstract: Let F be a family of meromorphic functions on the disk unit, a letbe no zero finite complex number and k as a positive integer, if for every $f\in F$ all of whose zeros is of multiplicity at least $\geqslant k+1$ $(k\geqslant 2)$, whose pole at least two, f' and $f^{(k)}$ IM share a, then F is normal in the flat disk.

Keywords: meromorphic functions; shared values; normal critieria