

土体内柱形孔扩张问题的一般解及剪胀角的影响分析

张光俊

(江苏省阜宁县公路管理站,江苏阜宁 224400)

摘要:根据土塑性力学的基本原理,在考虑材料剪胀性的情况下,解得了土体内柱形孔扩张时塑性区范围大小的理论计算公式,进而得到了柱形孔扩张时引起周围土体内塑性区和弹性区应力场和位移场的解析解。研究了剪胀角 ψ 对弹塑性交界处半径 R 的影响并给出了剪胀角的测试方法。通过算例研究发现,弹塑性交界处半径 R 随着剪胀角 ψ 的增大而逐渐减小,塑性区平均体积应变却随着剪胀角 ψ 的增大而增大。

关键词:剪胀角;柱形孔扩张;应力场;位移场

中图分类号:TU411.7

文献标识码:A

文章编号:1671-5322(2008)03-0045-05

圆孔扩张法最初被用于金属加工方面,后来被推广用于岩土工程中的压力测试分析、深基础的承载力分析以及由于沉桩而产生的土体扰动分析^[1]。Randolph等^[2]利用圆柱孔扩张问题研究了沉桩问题,求出了沉桩后桩周土体中的有效应力和孔隙水压力。文献[3]应用柱形孔扩张法计算塑性区的影响范围,但没有得出塑性区的位移场和应力场。文献[4]通过引入修正系数的方法,假设整个弹性区、塑性区以及弹、塑性交界处的径向位移有相同的形式,得出了整个土体范围内的径向位移表达式,但修正系数较难确定。Carter等^[5]亦利用球穴扩张理论推得了球形扩张塑性区内的位移表达式,但也由于没有给出弹塑性交界处半径的表达式。李月健^[6]推得了土体塑性区内平均体积应变的理论计算公式,同时求得了土体内球穴扩张时引起周围应力和位移问题的一般解。文献[7]和[8]在应力跌落应变软化模型的基础上,对柱形孔扩张问题进行理论和应用研究,但都没有考虑土体的剪胀角的影响。本文在文献[5]和[6]研究的基础上推导出了柱形孔扩张时的塑性区的位移场和应力场的解析解,得到了整个土体范围内的位移场和应力场的表达式并分析了剪胀角对塑性区半径和平均体积应变的影响。

1 柱形孔扩张问题的弹塑性分析

对无限体内柱形孔扩张问题的研究,假定土体是均匀的、各向同性的理想弹塑性体,符合摩尔-库仑屈服准则,采用剪胀角 ψ 来描述土体的剪胀性或剪缩性,体积力不计,考虑初始应力 P_0 ,假定土体内有初始孔半径为 R_0 的柱体,承受均布的柱形孔压力。当压力增加时,围绕着某一柱形孔的柱形区将由弹性状态进入塑性状态。随着内压力的逐渐增大,塑性区不断扩大,直至内压力增大到极限孔压力 P_u ,此时球形孔半径为 R_u 。设弹、塑性交界处的半径为 R ,在半径 R 以内为塑性区, R 以外土体仍处于弹性状态(见图1)。由于柱形孔扩张是轴对称问题,采用柱坐标,并规定以压应力为正。

1.1 弹、塑性区的应力场和位移场

柱形孔扩张是中心对称问题,采用柱坐标,其平衡微分方程为:

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0 \quad (1)$$

几何方程:

$$\varepsilon_r = \frac{du_r}{dr} \quad (2)$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{u_r}{r} \quad (3)$$

收稿日期:2008-05-19

作者简介:张光俊(1960-),男,江苏阜宁人,工程师,主要研究方向为岩土基础。

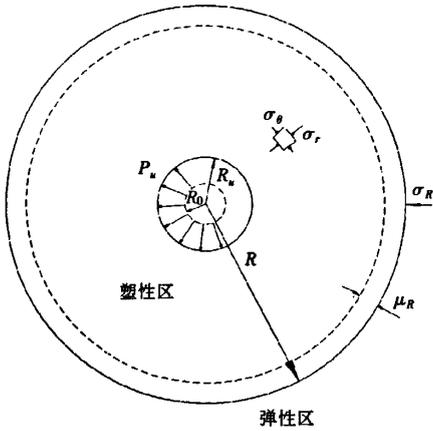


图 1 柱形孔扩张图

Fig.1 Cylindrical cavity expansion

摩尔—库仑屈服准则:

$$\sigma_r - \sigma_\theta = (\sigma_r + \sigma_\theta) \sin \phi + 2c \cos \phi \quad (4)$$

式中: \$\sigma_r, \sigma_\theta\$ 分别为径向应力、环向应力。取应力函数为 \$\varphi = A \ln r\$。考虑初始应力 \$p_0\$, 并设定弹塑性交界处的位移记为 \$u_R\$, 则弹性区的应力和位移表达式分别为:

$$\sigma_r = \frac{A}{r^2} + P_0 \quad (5)$$

$$\sigma_\theta = -\frac{A}{r^2} + P_0 \quad (6)$$

$$u_r = \frac{1+\nu}{E} r \sigma_r = \frac{R}{r} u_R \quad (7)$$

由式(5)和(6)可得:

$$\sigma_\theta = 2P_0 - \sigma_r \quad (8)$$

由(4)式和(8)式, 在弹塑性交界处 \$r=R\$ 可得:

$$\sigma_R = P_0(1 + \sin \phi) + c \cos \phi \quad (9)$$

在弹塑性交界处 \$r=R\$, 式(5)与式(9)相等, 得弹性区内的应力:

$$\sigma_r = \frac{1}{r^2} (p_0 \sin \phi + c \cos \phi) + P_0 \quad (10)$$

由式(1)和式(4)可得:

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{2\sin \phi \sigma_r}{1 + \sin \phi r} + \frac{2c \cos \phi}{1 + \sin \phi r} = 0 \quad (11)$$

解此方程并用边界条件 \$r=R_u\$ 时, \$\sigma_r = p_u\$ 代入后得塑性区径向应力:

$$\sigma_r = (p_u + c \cot \phi) \left(\frac{R_u}{r} \right)^{\frac{2\sin \phi}{1+\sin \phi}} - c \cot \phi \quad (12)$$

上式表明, 已知边界条件柱形孔内压 \$p_u\$ 及相

应的孔径 \$R_u\$, 可以计算塑性区内各点的径向应力值。环向应力可由式(4)得到:

$$\sigma_\theta = \sigma_r \frac{1 - \sin \phi}{1 + \sin \phi} - \frac{2c \cos \phi}{1 + \sin \phi} \quad (13)$$

当 \$r=R\$ 时, 可得:

$$\sigma_R = (p_u + c \cot \phi) \left(\frac{R_u}{R} \right)^{\frac{2\sin \phi}{1+\sin \phi}} - c \cot \phi \quad (14)$$

上式代入式(7), 如考虑初始应力 \$p_0\$, 可得弹塑性交界处位移:

$$u_R = \frac{1+\nu}{E} R$$

$$\left[(p_u + c \cot \phi) \left(\frac{R_u}{R} \right)^{\frac{2\sin \phi}{1+\sin \phi}} - (p_0 + c \cot \phi) \right] \quad (15)$$

由式(9)和(14)相等可解得柱形孔扩张的最终内压:

$$p_u = (p_0 + c \cot \phi) (1 + \sin \phi) \left(\frac{R}{R_u} \right)^{\frac{2\sin \phi}{1+\sin \phi}} - c \cot \phi \quad (16)$$

$$\text{令 } \frac{R}{R_u} = \sqrt{I_r} \quad (17)$$

$$p_u = (p_0 + c \cot \phi) (1 + \sin \phi) (I_r)^{\frac{2\sin \phi}{1+\sin \phi}} - c \cot \phi \quad (18)$$

将上式代入式(15)得:

$$u_R = \frac{1+\nu}{E} R [(p_0 + c \cot \phi) \sin \phi] \quad (19)$$

由几何方程和式(14)可以求得弹塑性交界处的环向应变 \$\varepsilon_{\theta R}\$ 和径向应力:

$$\varepsilon_{\theta R} = \frac{1+\nu}{E} [(p_0 + c \cot \phi) \sin \phi] \quad (20)$$

$$\sigma_R = (p_0 + c \cot \phi) (1 + \sin \phi) - c \cot \phi \quad (21)$$

由式(12)可以看出, 要解得塑性区的应力, 应先求得柱形孔扩张的内压 \$p_u\$, 而要求得 \$p_u\$ 的值先求得塑性区的半径 \$R\$, 一个方程不可能同时求得 \$p_u\$ 和 \$R\$ 值。下面结合塑性区位移的计算和体积变化的计算来求出塑性区平均体积应变 \$\Delta\$, 同时解得 \$p_u, R\$ 值和塑性区的应力。

根据塑性区位移大变形假设, 塑性区内几何方程可用应力和应变变化率来表示:

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r} \quad (22)$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{u_r}{r} \quad (23)$$

式中: r 为半径, u_r 为径向位移。

土体的本构方程为:

$$\sigma = D\varepsilon \quad (24)$$

式中:

$$\sigma = (\sigma_r, \sigma_\theta)^T$$

$$\varepsilon = (\varepsilon_r, \varepsilon_\theta)^T$$

由文献[5],土体的本构矩阵 D 为:

$$D = \left[I - \frac{D_E ab^T}{b^T D_E a} \right] \quad (25)$$

式中: $a = (1, -N)^T$; $b = (1, -M)^T$

$$N = \frac{1 + \sin \phi}{1 - \sin \phi}; M = \frac{1 + \sin \psi}{1 - \sin \psi}$$

$$D_E = \begin{bmatrix} \lambda + 2G & \lambda \\ \lambda & \lambda + 2G \end{bmatrix}$$

I 为单位矩阵, λ, G 为拉梅常数, ψ 为剪胀角。

将计算出的本构矩阵 D 带入式(24),并结合式(22)可得:

$$\frac{\partial u_r}{\partial r} + \alpha \frac{u_r}{r} = -x \frac{\sigma_r}{2G} \quad (26)$$

$$\text{式中: } x = \frac{2(1-\nu) - 2\nu(M+N) + MN}{(1+\nu)MN}$$

$$\alpha = 1/M$$

式(16)带入式(12)并对 R 求速率,再带入上式后得:

$$\frac{\partial u_r}{\partial r} + \alpha \frac{u_r}{r} = -2x\varepsilon_{\theta R} \left(\frac{r}{R} \right)^\beta \frac{R}{r} \quad (27)$$

带入式 $u = 2\varepsilon_{\theta R} R$ 并解上式得:

$$u = \varepsilon_{\theta R} \left[T \left(\frac{R}{r} \right)^\alpha - Z \left(\frac{r}{R} \right)^\beta \right] R \quad (28)$$

在小应变情况下解上式并结合弹塑性交界处的边界条件,最终解得:

$$u_r = \varepsilon_{\theta R} \left[A \left(\frac{R}{r} \right)^{1+\alpha} + B \left(\frac{R}{r} \right)^{1-\beta} + S \right] r \quad (29)$$

$$\text{式中: } \beta = 1 - \frac{N-1}{N} Z = \frac{2x}{\alpha + \beta}, T = Z + 2, A =$$

$$\frac{T}{1+\alpha}, B = \frac{-Z}{1-\beta}, S = 1 - A - B,$$

1.2 塑性区平均体积应变 Δ 的推导

塑性区内的平均体积应变可由塑性区内的总体积比变化与塑性区总体积的比值求得,由式(29)及几何方程可求得径、环向应变并得塑性区平均体积应变,即:

$$\Delta = \frac{\int_{R_u}^R 2\pi r \varepsilon_v}{\pi(R^2 - R_u^2)} = 2\varepsilon_{\theta R} \frac{I_\pi - AI_\pi^{\frac{1+\alpha}{2}} - BI_\pi^{\frac{1-\beta}{2}} - S}{I_\pi - 1} \quad (30)$$

另一方面,柱形孔扩张后总体积变化应等于弹性区的体积变化和塑性区的体积变化之和:

$$R_u^2 = R^2 - (R^2 - u_R^2) + (R^2 - R_u^2) \Delta$$

将式(19)带入上式并结合式(17),可得:

$$\Delta = \frac{1 - (2F + F^2)I_\pi}{I_\pi - 1} \quad (31)$$

$$\text{式中: } F = \frac{1+\nu}{E} \sin \phi (p_0 + c \operatorname{ctg} \phi)$$

由式(30)和(31)得:

$$I_\pi = \frac{1 - 2\varepsilon_{\theta R} (I_\pi^{\frac{1+\alpha}{2}} - BI_\pi^{\frac{1-\beta}{2}} - S)}{2F + F^2} \quad (32)$$

上式通过试算可以求 I_π 。至此,柱形孔扩张问题的完整解已经获得,即可用理论方法直接求得土体内球穴半径扩张到 R_u 时的极限扩张压力 P_u 、弹塑性交界区的半径 R 及弹性区和塑性区内各点的应力和位移。

2 计算参数的选取

摩尔-库仑模型是理想弹塑性模型,采用此模型要用到5个参数:弹性模量 E 、泊松比 ν 、内摩擦角 ϕ 、粘聚力 c 和剪胀角 ψ 。5个参数中 E, ν, ϕ 和 c 可用三轴试验根据工程的实际情况取得,剪胀角在土力学的概念上是表示在剪应力作用时,土体具有剪胀或剪缩特性。由于它的存在使土区别于其他材料。它是根据土体的塑性体积应变与正应变和剪应变关系的定义获得,由文献[5]可以推得:

$$\frac{\varepsilon_v}{\varepsilon_r} = - \frac{2 \sin \phi}{1 - \sin \phi} \quad (33)$$

上式反映在三轴实验中可由图2表示,即 ψ 值也可由三轴试验获得。 ε_v 和 ε_r 分别为三轴试验中的体积应变和垂直应变。由式(33)可知,当 ψ 大于0时, ε_v 为负值,这相当于图2中的曲线2,土体体积减缩,反之,当 ψ 小于0时, ε_v 为正值。如图2中的曲线1,土体体积剪胀。由此可知,由于一般正常固结粘性土在荷载作用下体积剪缩,因此其 ψ 值大于0,而对于密实砂土和超固结粘土, ψ 可能小于0。

3 算例分析

3.1 柱形孔扩张引起的应力和位移场

图3和图4表示某柱形孔扩张时按本文方法计算得到的应力场和位移场。计算参数为凝聚力 $c = 34 \text{ kPa}$, 摩擦角 $\phi = 5^\circ$, 剪胀角 $\psi = 1^\circ$, 弹性模

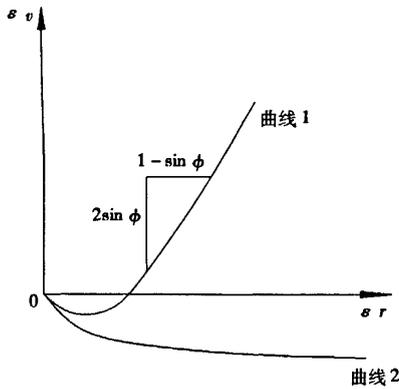


图 2 三轴试验 ϵ_v — ϵ_r 曲线

Fig. 2 Resulting strain curves of ϵ_v vs ϵ_r for a standard triaxial test

量 $E = 10 \text{ MPa}$, 泊桑比 $\nu = 0.48$, 扩张极限半径 $R_u = 0.2 \text{ m}$, 初始应力为 $p_0 = 172 \text{ kPa}$ 和 $p_0 = 0$, 即不考虑初始应力两种情况。当考虑初始应力时计算得到 R 为 1.59 m , 极限孔压为 461.34 kPa ; 不考虑初始应力时 R 为 1.9 m , 极限孔压为 217.9 kPa 。从图 3 可以看出, 若考虑初始应力, 在 $r < R$ 时, 即在塑性区内, σ_r 和 σ_θ 均为压应力, 且随 r 的增加减小较快; 当 $r = R$ 时, 由塑性状态变为弹性状态; 当 $r > R$ 时, 即在弹性区内, σ_r 和 σ_θ 均为压应力, 但 σ_θ 在弹塑性交界处附近小于初始应力。从图 3 还可以看出, 当不考虑初始应力时, 虽

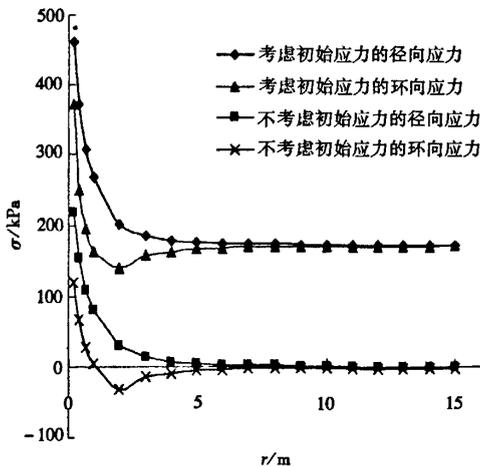


图 3 径向应力和环向应力分布图

Fig. 3 Distribution of radial stress and circumferential stress

然曲线形状与考虑初始应力时类似, 但其值比考虑土体初始应力时小得多。由于不考虑土体初始应力不能反映上覆压力对应力的影响, 因此笔者认为, 求解柱形孔扩张时引起周围的应力场, 应考虑初始应力的影响。从图 4 表示的位移场可以看出, 不论是考虑初始应力还是不考虑初始应力, 径向位移都是连续的, 且其值基本相等, 位移随距离平方衰减, 最大位移发生在 R_u 处, 为 8.3 cm 。

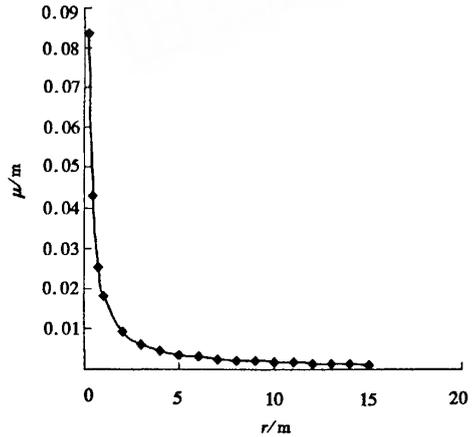


图 4 径向位移变化曲线

Fig. 4 Distribution of radial displacement

3.2 剪胀角的影响分析

图 5 是在其它土体参数不变的情况下, 塑性区半径 R 随剪胀角的变化曲线。从图中发现, 随着剪胀角的增大, 弹塑性区交界处的半径 R 逐渐减小。图 6 所示为剪胀角对径向位移的影响。随

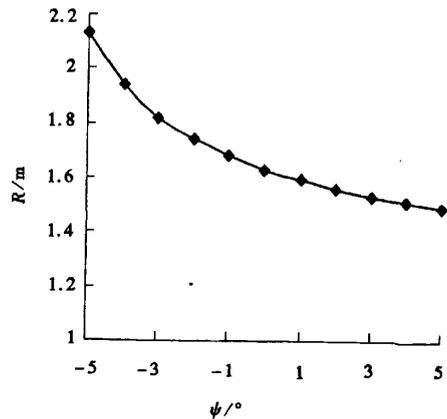


图 5 剪胀角对塑性区半径 R 的影响

Fig. 5 Effect of dilation angle on the radius of elastic plastic boundary

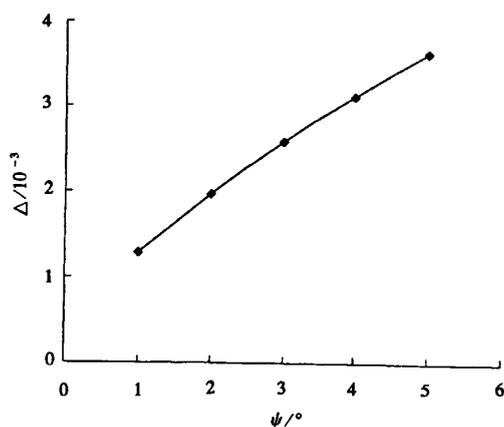


图6 剪胀角对塑性区平均体积应变的影响

Fig.6 Effect of dilation angle on average plastic volumetric strain

随着剪胀角的增大,径向位移越小,位移衰减得越快。塑性区平均体积应变随着剪胀角的增大而增

大。由于土体剪胀性的存在,增加了土体的抗剪切能力,有阻止土体破坏的趋势,可见考虑剪胀性对土体的影响是很重要的。

4 结论

(1)给出了柱形孔扩张时,弹、塑性区的应力和位移表达式。弹塑性交界处径向应力、环向应力 σ_r 和 σ_θ 为常数,与交界处半径 R 的大小无关,塑性区中径向应力随着孔径的增大而减小。柱形孔扩张后的应力问题应考虑初始应力的影响。

(2)柱形孔扩张后土体内的径向位移不论考虑初始应力还是不考虑初始应力都是连续的,并随离柱形孔中心距离的增大而减小。

(3)给出了塑性区中平均体积应变的推导公式和剪胀角的测试方法,计算得出弹塑性交界处半径 R 随着剪胀角 ψ 的增大而逐渐减小;而塑性区中的平均体积应变却随着剪胀角 ψ 的增大而增大。

参考文献:

- [1] 龚晓南,李向红. 静压桩挤土效应中的若干力学问题[J]. 工程力学,2000,17(4):7-11.
- [2] Randolph M F, Carter J P, Wroth C P. Driven Piles in Clay - the Effects of Install Action and Subsequent Consolidation. Geotechnique 1979,29(4):1024-1027.
- [3] 潘林有. 利用圆孔扩张理论分析静压桩挤土效应[J]. 地下空间,1999,19(3):174-177.
- [4] 施建勇,陈文. 沉桩挤土效应分析[J]. 河海大学学报,2003,31(4):15-418.
- [5] Carter J P, Booker J R, Yenny S K. Cavity Expansion in Cohesive Frictional Soils[J]. Geotechnique,1986,36(3):349-348.
- [6] 李月健. 土体内球形孔穴扩张及挤土桩沉桩机理研究[D]. 杭州:浙江大学,2001.
- [7] 张忠苗,包风,陈云敏. 考虑材料应变软化的球(柱)孔扩张理论在桩底注浆中的研究[J]. 岩土工程报,2000,22(2):243-246.
- [8] 蒋明镜,沈珠江. 考虑剪胀的线性软化的柱形孔扩张问题[J]. 岩土力学与工程报,1997,16(6):550-557.

A General Solution for the Expansion of Cylindrical Cavity in Soil Mass and the Influence Analysis of Dilation Angle

ZHANG Guang-jun

(Funing Load Management Station of Jiangsu, Jiangsu Funing 224400, China)

Abstract: Based on the soil plastic mechanics, a formula for the plastic scope in the expansion of cylindrical cavity is presented with consideration of soil dilatancy. Then, the analytical solutions of the stress and displacement field are derived. It is shown that the angles of dilation have obvious effects on the radius of elastic plastic boundary. A testing method for dilation angle was given. It is proven by examples that with the increase of dilation angle, the radius R decreases gradually while the average plastic volumetric strain increases.

Keywords: dilation angle; cylindrical cavity expansion; stress field; displacement field