

球面上的等周问题

陈丽娟

(盐城工学院 基础教学部, 江苏 盐城 224051)

摘要: Σ 是球面, Σ 上有一定长为 L 的简单闭曲线 C 。对于等周曲线 C 围成的区域 D 的面积, 通过引入辅助函数: $\phi(t, \lambda) = \text{Area}(D) + \lambda(L - \int_0^L |R'(s, t)| ds)$, 根据拉普拉斯定理、曲率、测地曲率和挠率得曲线为圆时, 围成的面积最大。

关键词: 等周; 曲率; 测地曲率; 挠率

中图分类号: O186.11

文献标识码: A

文章编号: 1671-5322(2008)04-0010-02

当平面简单闭曲线 C 的长度为 L , C 界定的区域的面积为 A 时, 则有 $L^2 - 4\pi A \geq 0$ [1], 且等号成立当且仅当是一个圆 [1]。本文在平面的基础上, 对球面进行讨论。

定理 1: 球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 的面积可表示为:

$$\text{Area}(D) = - \int_{\partial D} w_{12} \quad (1)$$

证明: 球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 上除北极外任意一点 (x, y, z) 与北极 $N = (0, 0, 1)$ 的连线, 即 xy 上任意一点 $(u, v, 0)$ 与北极连线交于 $(\frac{2u}{1+u^2+v^2}, \frac{2v}{1+u^2+v^2}, \frac{u^2+v^2-1}{1+u^2+v^2})$ 。因此球面 $r(u, v)$ 可表示为:

$$r(u, v) = \left(\frac{2u}{1+u^2+v^2}, \frac{2v}{1+u^2+v^2}, \frac{u^2+v^2-1}{1+u^2+v^2} \right) \quad (2)$$

则根据正交标架的结构方程, 有:

$$w_{12} = \frac{2vdu}{1+u^2+v^2} - \frac{2udv}{1+u^2+v^2} \quad (3)$$

曲线 $R(s, t)$ 围成的面积为:

$$\begin{aligned} \text{Area}(D) &= \iint_D dA = \iint_D w_1 \wedge w_2 = \\ &= -\frac{1}{k} \iint_D dw_{12} = - \int_{\partial D} w_{12} \end{aligned} \quad (4)$$

定理 2: 已知球面上一曲线 c 的弧长参数为:

$r(s) = (f(s), g(s), m(s))$, $s \in [0, L]$ 且球面方程

为 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, 围成的面积 [2]

$$A^2 \leq 4\pi^2 - L^2 \quad (5)$$

当曲线是圆时, 围成的球面面积最大。

证明: 在曲线 $r(s)$ 上任一点 p , 沿曲线 $r(s)$ 在球面中的法向量 $e_2(s)$ 作测地线, 并取测地线上到点 p 长为 $th(s)$ 的点 p' 。其中 $e_2(s) = n(s) \times t(s)$, $h(s)$ 为 $[0, L]$ 上任一光滑函数, $h(0) = h(L) = 0$, $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ 。

向量 op' 是由 op 与 $e_2(s)$ 组成的直角坐标系中的单位向量, 则:

$$op' = \cos(th(s))op + \sin(th(s))e_2(s) \quad (6)$$

因为 p 为 $r(s)$ 上的点, p' 为球面上曲线 $r(s)$ 沿 $e_2(s)$ 移动得到的一簇曲线 $R(s, t)$ 上的一点。曲线 $R(s, t)$ 的弧长为:

$$L(s, t) = \int_0^L |R'(s, t)| ds \quad (7)$$

曲线 $R(s, t)$ 围成的面积为:

$$\begin{aligned} \text{Area}(D) &= - \int_{\partial D} \frac{2vdu}{1+u^2+v^2} - \frac{2udv}{1+u^2+v^2} = \\ &= \int_{\partial D} \frac{x \frac{dy}{ds} - y \frac{dx}{ds}}{1-z} ds \end{aligned} \quad (8)$$

现在在 s, t 受条件 $L = L(s, t)$ 的限制下, 求面积最大, 则可引入辅助函数:

$$\phi(t, \lambda) = \text{Area}(D) + \lambda(L - \int_0^L |R'(s, t)| ds) \quad (9)$$

收稿日期: 2008-08-14

作者简介: 陈丽娟 (1980-), 女, 江苏大丰市人, 助教, 硕士, 主要研究方向为微分几何。

万方数据

根据拉普拉斯定理, $\phi(t, \lambda)$ 对参数 t 求导为 0,

$$0 = \frac{\partial \phi(t, \lambda)}{\partial t} \Big|_t = \frac{\partial [Area(D) + \lambda(L - \int_0^L |R'(s, t)| ds)]}{\partial t} \Big|_{t=0} \quad (10)$$

其中;

$$\frac{\partial \left[\int_0^L |R'(s, t)| ds \right]}{\partial t} \Big|_{t=0} = 2 \int_0^L kg(s) h(s) ds \quad (11)$$

$$\frac{\partial Area(D)}{\partial t} \Big|_{t=0} = \frac{1}{2} \int_0^L \left\{ h \left[-m + m'' - \frac{\left| \frac{fg}{f'g'} \right|^2}{1-m} \right] + h'm' \right\} ds \quad (12)$$

将(11)和(12)代入到(10)中,得:

$$0 = \frac{1}{4} \int_0^L \left\{ h \left[-m + m'' - \frac{\left| \frac{fg}{f'g'} \right|^2}{1-m} + 8\lambda kg \right] + h'm' \right\} ds \quad (13)$$

对于定义在 $[0, L]$ 上任意光滑函数 $h(s)$ 、 $h'(s)$, 满足

$$h(0) = h(L) = 0, h'(0) = h'(L)$$

有(13)式成立,由此容易推出:

$$\begin{cases} m'(s) = 0 \\ -m(s) + m''(s) - \frac{\left| \frac{f(s)g(s)}{f'(s)g'(s)} \right|^2}{1-m(s)} + 8\lambda kg(s) = 0 \end{cases} \quad (14)$$

得到: $1 + 8\lambda kg(s) = 0$

即: $kg = -\frac{1}{8\lambda} = \text{常数}$

又有:

$$k^2 = kg^2 + 1 = \left(\frac{1}{8\lambda}\right)^2 + 1 = \text{常数}$$

$$\tau = \tau g - \alpha' = \tau g - \frac{d}{ds}(-\arctan kg) = 0$$

综上所述,曲线 $r(s)$ 为圆时,所围成的球面积最大。

$$A^2 \leq 4\pi^2 - L^2$$

参考文献:

- [1] 陈省身,陈维恒.微分几何讲义[M].2版.北京:北京大学出版社,2004.
- [2] LI P, SCHOEN R, YAU S T. On the Isoperimetric Inequality for Minimal Surface[J]. Ann. Scuola Norm., 1984, 9: 237 - 244.

On the Isoperimetric Inequality for Circle

CHEN Li-juan

(Department of Fundamental Sciences, Yancheng Institute of Technology, Jiangsu Yancheng 224051, China)

Abstract: Let Σ be a sphere in R^3 . A simple closed curve C of length L encloses domain D of area A on Σ . Using auxiliary function $\phi(t, \lambda) = Area(D) + \lambda(L - \int_0^L |R'(s, t)| ds)$, laplace's theorem, curvature, geodesic curvature and torsion, we get the inequality $A^2 \leq 4\pi^2 - L^2$ that area is biggest when the curve is a circle.

Keywords: isoperimetric inequality; curvature; geodesic curvature; torsion

(责任编辑:张英健;校对:范大和)