

正态分布的均值和方差在伞序约束下的最大似然估计

陈倩

(北京航空航天大学 理学院, 北京 100191)

摘要: 讨论了 k 个独立正态总体的均值和方差同时在伞序约束下最大似然估计的求解问题, 并给出了一个求解方法和一个例子。

关键词: 伞序; 保序回归; 最大似然估计; 迭代算法

中图分类号: O212 **文献标识码:** A **文章编号:** 1671-5322(2009)01-0012-04

1 问题的提出

序约束下多个正态总体参数估计的研究近年来有很大进展。参考文献[1]和[2]考虑了 k 个独立正态总体的均值被简单半序和简单树半序约束方差为未知的最大似然估计; 参考文献[3]讨论了 k 个独立正态总体的均值和方差同时在简单半序约束下的最大似然估计; 参考文献[4]给出了 k 个独立的正态总体的均值和方差被简单树半序和简单半序约束下的最大似然估计的求解方法。但至今没有对 k 个独立的正态总体均值和方差同时在伞序约束下的最大似然估计问题进行研究。而伞序约束下的估计也是一类非常有意义的问题。

设有 k 个独立的正态总体 $X_{ij} \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$ ($j = 1, 2, \dots, n_i, i = 1, 2, \dots, k$) 均值和方差均为未知参数。令 $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k)$, $\sigma^2 = (\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_k^2)$, u 和 σ^2 都满足伞序约束

$$u_1 \leq \dots \leq u_h \geq \dots \geq u_k \quad (1)$$

$$\sigma_1^2 \geq \dots \geq \sigma_h^2 \leq \dots \leq \sigma_k^2 \quad (2)$$

其中 h 是给定的数, $1 \leq h \leq k$, h 称为顶点。这意味着 k 个总体中第 h 个总体最好, 而对于 h 左侧和右侧的总体, 哪个更好一些, 不做比较。

下面将详细讨论 u 和 σ^2 分别在(1)和(2)约

束下的最大似然估计问题。

定义 给定一个有限维向量 $X = (x_1, x_2, \dots, x_k)$, 则 $X^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_k^*)$ 称为 X 的保序回归, 如果 $X^* \in E$ 并且

$$\sum_{i=1}^k (x_i - x_i^*)^2 w_i = \min_{y \in E} \sum_{i=1}^k (x_i - y_i)^2 w_i$$

其中 $E = \{y \in R^k; y_1 \leq \dots \leq y_h \geq \dots \geq y_k\}$, $W = (w_1, w_2, \dots, w_k)$ ($w_i > 0, i = 1, 2, \dots, k$) 是一给定的权函数。

下文中 $u^* = (\mu_1^*, \mu_2^*, \dots, \mu_k^*)$ 表示 u 在(1)约束下的保序回归。

当方差 σ^2 已知时, 约束(2)消失, Barlow et al^[5]指出 u 的最大似然估计 $u^* \in D$ 与 $(\bar{X}, W)$ 的保序回归等价, 这里

$$\bar{X} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_k),$$

$$\bar{x}_i = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} x_{ij},$$

$$W = \left(\frac{n_1}{\sigma_1^2}, \frac{n_2}{\sigma_2^2}, \dots, \frac{n_k}{\sigma_k^2} \right)$$

$$D = \{u \in R^k; u_1 \leq \dots \leq u_h \geq \dots \geq u_k\} \quad (3)$$

利用 ISRE 算法^[6], 可以求出 $(\bar{X}, W)$ 在(1)约束下的保序回归。

当正态均值 u 已知时, Robertson et al^[7]指出 σ^2 的保序最大似然估计是 (S, N) 的保序回归, 其中

收稿日期: 2008-11-24

基金项目: 国家自然科学基金(10726008)

作者简介: 陈倩(1984-), 女, 山东省淄博市, 硕士研究生, 主要研究方向为应用数理统计。

$$S = (s_1, s_2, \dots, s_k),$$

$$s_i = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} (x_{ij} - u_i)^2,$$

$$N = (n_1, n_2, \dots, n_k)$$

设满足约束条件(2)的全体集合为 G

$$G = \{\sigma^2 \in R^k; \sigma_1^2 \geq \dots \geq \sigma_k^2 \leq \dots \leq \sigma_k^2, \sigma_i^2 > 0, i = 1, 2, \dots, k\} \quad (4)$$

众所周知,对于正态总体, u 和 σ^2 同样起着举足轻重的作用。因此,在实际应用中,常常需要考虑 u 和 σ^2 在同时满足一定约束条件下的估计问题。下面将给出 u 和 σ^2 同时在伞序约束下的最大似然估计的计算方法,并给出一个例子。

2 算法和例子

对于 u 和 σ^2 在(1)和(2)约束下的最大似然估计,对数似然函数为

$$l(\mu, \sigma^2) = \sum_{i=1}^k \left\{ -\frac{n_i}{2} \ln \sigma_i^2 - \frac{1}{2\sigma_i^2} \sum_{j=1}^{n_i} (x_{ij} - \mu_i)^2 \right\} + C \quad (5)$$

C 是与 u 和 σ^2 无关的常数。设 $(\hat{U}, \hat{\sigma}^2)$ 为 (μ, σ^2) 在(1)和(2)约束下的最大似然估计,则 $\hat{U} \in D, \hat{\sigma}^2 \in \bar{G}$ 且

$$l(\hat{U}, \hat{\sigma}^2) = \sup \{ l(\mu, \sigma^2); u \in D, \sigma^2 \in G \} \quad (6)$$

其中 D, G 分别为第1部分中的(3)和(4), $\bar{G}$ 为 G 的闭包。

在第1部分已经提到,当 σ^2 (或 u) 已知,在(1) (或(2))约束下, u (或 σ^2) 的最大似然估计的求解方法。下面将在此基础上,给出 u 和 σ^2 同时在(1)和(2)约束下的迭代算法。

首先,令

$$\mu^{(0)} = \bar{X}, \sigma^{(0)} = \bar{\sigma}^2.$$

其中 $\bar{X} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_k), \bar{\sigma}^2 = (\bar{\sigma}_1^2, \bar{\sigma}_2^2, \dots,$

$\bar{\sigma}_k^2)$ 。 $\bar{x}_i = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} x_{ij}$ 和 $\bar{\sigma}_i^2 = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} (x_{ij} - \bar{x}_i)^2 / n_i, i = 1, 2, \dots, k$ 分别为样本均值和方差。

第 $(n, 1)$ 步:在假定 $\omega_i^{(n-1)} = \frac{n_i}{\sigma_i^{(n-1)}} (i = 1, 2, \dots, k)$ 下,求 $(\bar{X}, w^{(n-1)})$ 的保序回归 $(\mu^{(n)},$

$\omega^{(n-1)})$, 其中

$$\sigma^{(n-1)} = (\sigma_1^{(n-1)}, \dots, \sigma_k^{(n-1)}),$$

$$\sigma_i^{(n-1)} = \sum_{j=1}^{n_i} (x_{ij} - \mu_i^{(n)}) / n_i (i = 1, 2, \dots, k)$$

第 $(n, 2)$ 步:在假定 $S_i^{(n)} = \sum_{j=1}^{n_i} (x_{ij} - \mu_i^{(n)})^2 / n_i (i = 1, 2, \dots, k)$ 下,求 $(S^{(n)}, N)$ 的保序回归 $\sigma^{(n)}$, 其中

$$N = (n_1, n_2, \dots, n_k)$$

由上面的讨论知道

$$l(\mu^{(n)}, \sigma^{(n-1)}) = \sup \{ l(\mu, \sigma^{(n-1)}); u \in D \} \quad (7)$$

$$l(\mu^{(n)}, \sigma^{(n)}) = \sup \{ l(\mu^{(n)}, \sigma^2); \sigma^2 \in G \} \quad (8)$$

由(7)和(8)推出,当 $n \geq 2$ 时

$$l(\mu^{(n)}, \sigma^{(n-1)}) \leq l(\mu^{(n)}, \sigma^{(n)}) \leq l(\mu^{(n+1)}, \sigma^{(n)}) \quad (9)$$

在简单半序约束下,式(6)解的唯一存在性,以及 $(\mu^{(n)}, \sigma^{(n)})$ 收敛于 u 和 σ^2 的最大似然估计问题,已经在文献[2]中得到证明。而只要将简单半序改为本文提到的伞序,可以得到相同的结果,证明方法也类似。

例:在1992年我国的高考中,共需要考7门课程,总分710分。其中语文120分,数学120分,政治100分,物理100分,化学100分,生物70分。在下面的成绩表中,给出了吉林省5个市的各100名学生高考成绩,第1组为辽源市,第2组为松原市,第3组为吉林市,第4组为通化市,第5组为长春市。我们假定考试的分数服从正态分布。设 $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2), i = 1, 2, 3, 4, 5$ 。

过去的事实表明:

$$u_1 \leq u_2 \leq u_3 \geq u_4 \geq u_5,$$

$$\sigma_1^2 \geq \sigma_2^2 \geq \sigma_3^2 \leq \sigma_4^2 \leq \sigma_5^2$$

利用参考文献[6]中关于 ISER 算法的程序作为子程序,容易得到上述迭代算法的程序。当 u 和 σ^2 满足下面条件时,迭代停止

$$\max_i |\mu_i^{(n-1)} - \mu_i^{(n)}| < 10^{-3},$$

$$\max_i |\sigma_i^{(n-1)} - \sigma_i^{(n)}| < 10^{-3}$$

根据上面的条件,此例在 $n = 3$ 时迭代停止。计算结果见表2。

表 1 500 名学生考试成绩
Table 1 Test results of 500 students

	第 1 组		第 2 组		第 3 组		第 4 组		第 5 组	
1	405	400	434	352	440	449	403	332	388	358
2	444	435	476	459	421	442	422	348	336	358
3	326	354	498	420	386	294	386	460	459	366
4	306	348	246	450	451	517	422	368	369	418
5	387	314	456	382	493	436	342	370	424	352
6	365	242	397	364	448	388	273	347	405	419
7	351	486	462	391	378	457	332	397	448	434
8	429	261	266	388	493	401	377	473	432	217
9	345	376	389	433	391	409	508	348	472	334
10	345	503	488	448	400	411	421	379	400	397
11	471	424	277	346	369	368	520	415	312	347
12	354	370	479	501	396	368	306	364	375	461
13	166	399	288	494	389	417	497	364	373	396
14	438	310	453	336	519	348	489	363	446	473
15	379	413	329	423	462	432	493	358	238	305
16	435	387	479	402	478	405	408	240	434	406
17	428	242	384	486	458	465	357	407	372	323
18	328	312	299	436	435	442	534	383	409	429
19	377	384	415	473	298	259	469	416	416	398
20	380	430	368	458	468	300	397	446	400	420
21	414	437	297	391	438	424	444	448	345	412
22	412	463	315	356	478	426	492	460	287	341
23	350	414	241	414	413	462	351	483	500	383
24	528	380	407	448	383	327	355	404	348	443
25	305	434	344	461	454	408	429	390	322	434
26	420	419	389	321	484	388	434	486	418	425
27	413	278	374	353	442	414	420	398	417	428
28	450	469	358	248	384	458	397	460	413	387
29	442	447	424	437	354	419	323	409	405	372
30	448	443	208	385	419	466	509	441	298	440
31	418	433	363	302	446	394	447	377	487	414
32	380	305	393	378	507	342	419	369	471	202
33	391	427	369	467	444	269	386	433	543	408
34	402	347	431	268	233	515	338	346	488	472
35	381	395	275	359	445	351	422	406	490	496
36	429	406	414	313	427	405	464	397	451	372
37	323	307	267	425	468	300	454	349	413	452
38	393	377	231	271	341	469	325	478	445	462
39	470	488	423	280	532	215	433	493	301	432
40	404	417	314	407	219	508	333	342	397	546
41	444	436	433	515	383	271	428	274	362	380
42	238	397	438	381	402	544	434	324	470	320
43	406	448	379	234	462	396	306	362	419	533
44	392	433	457	439	535	465	336	355	307	417
45	269	336	455	413	436	419	350	397	240	464
46	431	417	424	276	521	437	329	384	483	378
47	363	388	503	405	478	430	304	299	420	375
48	416	437	467	416	359	490	374	490	331	355
49	250	399	362	370	393	527	331	273	470	338
50	362	457	302	225	496	456	322	335	404	327
$\bar{x}$	388.270		384.610		418.010		395.170		398.000	
σ^2	4 013.917		5 354.438		4 928.749		3 582.821		4 269.380	

表 2 计算结果
Table 2 Results of computation

$\mu^{(0)}$	388.270	384.610	418.010	395.170	398.000
$\sigma^{(0)}$	4 013.917	5 354.438	4 928.749	3 582.821	4 269.380
$\mu^{(1)}$	386.702	386.702	418.010	396.461	396.461
$\sigma^{(1)}$	4 687.595	4687.595	4256.619	4256.619	4271.748
$\mu^{(2)}$	386.440	386.440	481.010	396.583	396.583
$\sigma^{(2)}$	4687.526	4687.526	4256.783	4256.783	4271.390
$\mu^{(3)}$	386.440	386.440	481.010	396.583	396.583
$\sigma^{(3)}$	4687.526	4687.526	4256.783	4256.783	4271.390

参考文献:

- [1] Shi N Z, Jiang H. Maximum Likelihood Estimation of isotonic normal mean with unknown variance[J]. Multivariate Anal, 1998, 64:183-195.
- [2] Shi N Z. Maximum Likelihood Estimation of means and variance from normal populations under simultaneous order restrictions[J]. Multivariate Anal, 1994, 50:282-293.
- [3] 董普, 卢玉贞. 正态分布的均值被简单树半序约束方差为未知的最大似然估计[J]. 数学的实践与认识, 2003, 33(11):82-87.
- [4] 董普, 卢玉贞. 正态分布的均值和方差分别被简单树半序和简单半序约束下的保序最大似然估计[J]. 应用概率统计, 2003, 33(11):82-87.
- [5] Barlow R E, Bartholomew D J, Bremner J M, et al. Statistical Inference under Order Restriction: the Theory and Application of Isotonic Regression[M]. New York: Wiley, 1972.
- [6] Geng Z, Shi N Z. Isotonic Regression for Umbrella Orderings[J]. Appl Statist, 1990, 39(3):397-424.
- [7] Robertson T, Wright F T, Dykstra R L. Order Restricted Statistical Inference[M]. New York: Wiley, 1988.

Maximum Likelihood Estimation of Means and Variances from Normal Populations under Simultaneous Umbrella Restrictions

CHEN Qian

(Department of Mathematics, Beihang University, Beijing 100191, China)

Abstract: For normal populations, a procedure of obtaining the maximum likelihood estimations of means and variances under umbrella restrictions is discussed. An Algorithm and an example are also proposed in this paper.

Keywords: umbrella ordering; isotonic regression; maximum likelihood estimation; Iteration algorithm

(责任编辑:张英健;校对:沈建新)