齐型空间中广义极大算子的有界性

侯卫洁
(北京航空航天大学 理学院,北京 100191)

摘要:引进积集 $X\times E$ 上的一种拓扑结构和集合函数,用 Young 函数作用于极大算子,得到广义极大算子的 Morrey 空间有界性,推广了相关文献中的结果。

关键词:极大算子;Young 函数;齐型空间;有界性
中图分类号:O174.2 **文献标识码**:A **文章编号**:1671-5322(2009)01-0016-03

1 引言及主要结果

为了研究二阶椭圆偏微分方程解的局部正则性,Morrey 在文献[1]引进了现在被称为经典 Morrey 空间的函数空间,从那以后这些空间在关于偏微分方程解的局部正则性的研究中起着重要的作用。

文献[2]中给出了齐型空间的定义。

设 (X,d,μ) 是齐型空间,这里 X 是赋予了 Borel 测度 μ 和满足如下条件的拟距离 d 的拓扑空间

(1) $d(x,y)\geqslant 0, d(x,y)=0\Leftrightarrow x=y$;

(2) $d(x,y)=d(y,x)$;

(3) $d(x,y)\leqslant K_1[d(x,z)+d(z,y)], \forall x,y,z\in X, K_1\geqslant 1$

以 x 为中心,r 为半径的球 $B(x,r)=\{y\in X: d(x,y)<r\}$ 构成了点 x 的一组邻域基,测度 μ 满足双倍条件 $0<\mu(B(x,2r))\leqslant K_2\mu(B(x,r)), x\in X, r>0$。

一个齐型空间 (X,d,μ) 称为正规的,如果存在正常数 K_3,K_4 和 $\alpha>0$,使得 $K_3r^\alpha\leqslant\mu(B(x,r))\leqslant K_4r^\alpha$,对任意的 x 及 r 满足 $\mu(\{x\})<r<\mu(X)$ 成立。

对任意的齐型空间 (X,d,μ),存在一个正规的齐型空间 (X,δ,μ),使得 δ 与 d 拓扑等价[3]。

设 E 是任意一个集合且积集 $X\times E$ 有某种拓扑结构,β 是 $X\times E$ 上的 Borel 测度。θ 是映 X 中的球到 $X\times E$ 中的 Borel 集的集合函数,且满足:

(1) 如果 X 中的球 B_1,B_2 满足 $B_1\cap B_2=\emptyset$,则 $\theta(B_1)\cap(B_2)=\emptyset$;

(2) 如果球 $B_1\subset B_2$,则 $\theta(B_1)\subset(B_2)$;

(3) 对任意的 $x\in X$, $\bigcup_{r>0}\theta(B(x,r))=X\times E$

本文中假设 λ 为 $(0,\infty)$ 上的函数,且满足:

(a) 存在常数 C_1,使得对任意 $t\leqslant s$,有 $\lambda(t)\leqslant C_1\lambda(s)$;

(b) 存在常数 C_2,使得对任意 $t\leqslant s$,有 $\frac{\lambda(s)}{s^\alpha}\leqslant C_2\frac{\lambda(t)}{t^\alpha}$。

若 λ 为正增长函数且满足 $\lambda(2t)\leqslant D\lambda(t)$,以及 $1\leqslant D<2^\alpha$,则 λ 一定满足(a)(b),参考文献[4]。

定义齐型空间中的极大函数如下:

$$Mf(y,t)=\sup\left\{\frac{1}{\mu(B(x,r))}\int_{B(x,r)}|f(z)|\,d\mu(z):(x,t)\in\theta(B(x,r))\right\}$$

令 $M_qf=(Mf^q)^{\frac{1}{q}}$

设 ϕ 为 Young 函数,称 ϕ 满足 $\triangle_2$ 或 $\triangle_p^*$ 条件,$0<p<\infty$,如果 $\phi(2t)\leqslant c\phi(t), \forall t\geqslant 0$ 或存在 $k\geqslant 1$ 使得 $\phi(2t)\geqslant 2k^p\phi(t), \forall t\geqslant 0$。有关 Young 函数的结论参见文献[5]。

定义 设 $1\leqslant p<\infty$,f 为 $X\times E$ 上的局部可积函数,令

收稿日期:2008-11-24
基金项目:国家自然科学基金资助项目(10726008)。
作者简介:侯卫洁(1978-),女,山东日照人,硕士研究生,主要研究方向方向调和分析。

$$\|f\|_{L^{\phi,\lambda}(\beta)} = \sup_{x\in X,r>0}\frac{1}{\lambda(r)}\int_{\theta(B(x,r))}\phi(|f(y,t)|\,d\beta(y,t)$$

定义 $X\times E$ 上的广义 Morrey 空间如下

$$L^{\phi,\lambda}(X\times E,\beta) = \{f: \|f\|_{L^{\phi,\lambda}(\beta)} < +\infty\}$$

令 g 为 X 上的 Lebesgue 可测函数,定义

$$L^{\phi,\lambda}(X,\mu) = \{g: \|g\|_{L^{\phi,\lambda}(\mu)} = \sup_{x\in X,r>0}\frac{1}{\lambda(r)}\int_{B(x,r)}\phi(|g(y)|)d\mu(y) < +\infty\}$$

定义[6]　设 $p>0$ 且 ϕ 为 Young 函数,如果对任意的 $B(x,r)\subseteq X$ 及 $f\in L_{loc}(x)$,

$$\left(\frac{1}{\mu(B(x,r))}\int_{B(x,r)}|f(y)|^p d\mu(y)\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant C\phi^{-1}\left(\frac{1}{\mu(B(x,r))}\int_{B(x,r)}\phi(f|(y)|)d\mu(y)\right)$$

则称 $p\ll\phi$。

显然若 $p\ll\phi^\delta$,$0<\delta\leqslant1$,则 $p\ll\phi$。

引理　设 $1<p<\infty$,(X,d,μ) 为正规的齐型空间,若存在常数 C 使得 $\beta(\theta(B(x,r)))\leqslant C\mu(B(x,r))$,则对任意的 $f\in L^p(X,\mu)$ 有

$$\|Mf\|_{L^p(X\times E,\beta)} \leqslant C\|f\|_{L^p(X,\mu)}$$

证明:根据文献[7]中的定理 2,当 $\beta(\theta(B(x,r)))\leqslant C\mu(B(x,r))$ 成立时,极大算子 M 是弱(1,1)的,即 M 是从 $L^1(X,\mu)$ 到 $L^1(X\times E,\beta)$ 有界的。而 M 显然是 $L^\infty(X,\mu)$ 到 $L^\infty(X\times E,\beta)$ 有界的,由 Marcinkiewiz 插值定理,M 是从 $L^p(X,\mu)$ 到 $L^p(X\times E,\beta)$ 有界的,证毕。

下面给出本文的主要结果。

定理:设 $1\leqslant q<\infty$,ϕ 是 Young 函数,$\lambda(r)$ 满足(a)(b)条件,若存在 $0<\delta<1$,使得 ϕ^δ 是凸的,且 $q\ll\phi^\delta$,则下列条件等价:

(1) $\|M_qf\|_{L^{\phi,\lambda}(\beta)} \leqslant C\|f\|_{L^{\phi,\lambda}(\mu)}$,$f\in L^{\phi,\lambda}(\mu)$

(2) $\beta(\{(y,t)\in\theta(B(x,r)):M_qf(y,t)>s\}) \leqslant C\lambda(r)\|f\|_{L^{\phi,\lambda}(\mu)}$　$\forall s>0$

(3) $\beta(\theta(B(x,r)))\leqslant C\mu(B(x,r))$

2　定理的证明

(1)⇒(2)

$$C\lambda(r)\|f\|_{L^{\phi,\lambda}(\mu)} \geqslant \int_{\theta(B(x,r))}\phi(M_qf(y,t))d\beta(y,t)$$
$$\geqslant \int_{\{(y,t)\in\theta(B(x,r)):M_qf(y,t)>s\}}\phi(M_qf(y,t))d\beta(y,t)$$
$$\geqslant \phi(s)\beta(\{(y,t)\in\theta(B(x,r)):M_qf(y,t)>s\})$$

(2)⇒(3) 设 $B(x,r)$ 是 X 中的一个球,$\forall(y,t)\in\theta(B(x,r))$ 有

$$M_qf(y,t) \geqslant \left(\frac{1}{\mu(B(x,r))}\int_{B(x,r)}|f(z)|^q d\mu(z)\right)^{\frac{1}{q}}$$

取 $s = \left(\frac{1}{\mu(B(x,r))}\int_{B(x,r)}|f(z)|^q d\mu(z)\right)^{\frac{1}{q}}$,则

$$\frac{1}{\lambda(r)}\beta(\theta(B(x,r))) \leqslant \frac{1}{\lambda(r)}\beta(\{(y,t)\in\theta(B(x,r)):M_qf(y,t)>s\}) \leqslant C\|f\|_{L^{\phi,\lambda}(\mu)}$$

令 $f=\chi_{B(x,r)}$,则有

$$\beta(\theta(B(x,r))) \leqslant C\lambda(r)\frac{1}{\lambda(r_0)}\int_{B(x_0,r_0)}\phi(\chi_{B(x,r)}(y))d\mu(y) \leqslant$$
$$C\lambda(r)\left[\sup_{r\geqslant r_0}\frac{\mu(B(x,r)\cap B(x_0,r_0))}{\lambda(r_0)} + \sup_{r<r_0}\frac{\mu(B(x,r)\cap B(x_0,r_0))}{\lambda(r_0)}\right]$$

而且 $\sup_{r<r_0}\frac{\mu(B(x,r)\cap B(x_0,r_0))}{\lambda(r_0)}\leqslant C\frac{\mu(B(x_0,r_0))}{\lambda(r)}$

$$\sup_{r\geqslant r_0}\frac{\mu(B(x,r)\cap B(x_0,r_0))}{\lambda(r_0)} \leqslant C\frac{\mu(B(x,r))}{\lambda(r_0)} \leqslant \frac{K_4r_0^\alpha}{\lambda(r_0)} \leqslant C_2\frac{K_4r^\alpha}{\lambda(r)} \leqslant C_2\frac{K_4\mu(B(x,r))}{K_3\lambda(r)}$$

所以 $\beta(\theta(B(x,r)))\leqslant C\mu(B(x,r))$。

(3)⇒(1)　设 $B=B(x_0,r_0)$ 为齐型空间中的任意一个球,则对任意的 $f\in L^{\phi,\lambda}(X,\mu)$,我们令 $f(x)=f\chi_B(x)+f\chi_{B^c}(x)=g+h$

因为 $q\ll\phi^\delta$,由定义可以得到 $\phi^\delta(M_qg)\leqslant CM(\phi^\delta(|g|))$,则

$$\int_{\theta(B)}\phi(M_qg(y,t))d\beta(y,t) \leqslant C\int_{\theta(B)}[M(\phi^\delta(|g(y,t)|))]^{\frac{1}{\delta}}d\beta(y,t) \leqslant$$
$$C\int_B\phi(|f(x)|)d\mu(x) \leqslant C\lambda(r_0)\|f\|_{L^{\phi,\lambda}(\mu)}$$

其中第二个不等号用到了引理。

另外,因为 $\operatorname{supp} h\subseteq B^c$,且 $q\ll\phi$,可以得到

$$M_qh \leqslant C\phi^{-1}(M(\phi(|h|))) \leqslant C\phi^{-1}\left(\sup_{x\in X,r>0}\frac{1}{\mu(B(x,r))}\int_{B(x,r)}\phi(|f(y)|)d\mu(y)\right) \leqslant C\phi^{-1}\left(\frac{\lambda(r_0)\|f\|_{L^{\phi,\lambda}(\mu)}}{\mu(B)}\right)$$

因此

$$\int_{\theta(B)} \phi(M_q h(y,t))\, d\beta(y,t) \leqslant$$

$$C\lambda(r_0)\, \|f\|_{L^{\phi,\lambda}(\mu)} \frac{\beta(\theta(B))}{\mu(B)} \leqslant$$

$$C\lambda(r_0)\, \|f\|_{L^{\phi,\lambda}}(\mu)$$

所以

$$\int_{\theta(B)} \phi(M_q f(y,t))\, d\beta(y,t) \leqslant$$

$$C\lambda(r_0)\, \|f\|_{L^{\phi,\lambda}}(\mu)$$

证毕。

注:(1)若 $X \times E = X^{+}$, $\theta(B) = \widetilde{B}$,则文中的结果即为文献[6]的结论,$X \times E = X^{+}$, $\theta(B) = \widetilde{B}$, $\phi(t) = t^{p}$,则得到文献[9]的主要结果。

(2)若 $\phi(t) = t^{p}$, $\theta(B) = \widetilde{B}$, $q = 1$,则可以得到文献[4]的结论。

(3)令 $X = R^{n}$, $\phi(t) = t^{p}$, $q = 1$,则此结论即为文献[8]的结果。

参考文献:

[1] Morrey C B Jr. On the solutions of quasi - linear elliptic partial differential equations[J]. Trans. Amer. Math. Soc, 1938, 43:126 - 166.

[2] Fan D S, Lu S Z, Yang D C. Boundeness of operaters in Morrey spaces on homogeneous spaces and its applications[J]. Acta Math. Sinica, 1999, 42:583 - 590.

[3] Macias R A, Segoria C. Lipschitz functions on spaces of homogeneous type[J]. Adv. in Math., 1979, 33(3):257 - 270.

[4] Tan C M. Boundeness of maximal operaters in Morrey spaces on homogeneous spaces[J]. Acta Math. Sinica, 2003, 46:427 - 430.

[5] Stromberg J O. Bounded mean oscillation with Orlicz norms and duality of Hardy spaces[J]. Indiana Unin. Math., 1979, 28:511 - 544.

[6] Liu Lanzhe. Weighted boundeness for generalized maximal and singular integral operators in Orlicz Morrey spaces[J]. Chinese Quarterly Journal of Mathematics, 1997, 12:51 - 57.

[7] Liu Lanzhe. Weighted boundeness for a general maximal operators[J]. Journal of Changsha University of Electic Power, 1995, 10:117 - 121.

[8] Chen S Q, Shu L S. Boundeness of generalized maximal operaters in Morrey spaces on homogeneous spaces[J]. Journal of Anhui Normal University(Natural Science), 2006, 29:9 - 11.

[9] Tan C M. Boundeness of maximal operaters in Morrey spaces and Carleson measure[J]. Journal of Chongqing Teachers College, 2000, 19:64 - 69.

Boundeness of Generalized Maximal Operaters on Homogeneous Spaces

HOU Wei-jie

(School of Science, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100191, China)

Abstract: In this paper, the authorr introduces a type of topological structure in the Cartesian product and a set function, and obtains boundeness of generalized operators in Morrey spaces. The results improve and extend the known results.

Keywords: Maximal operator; Young function; Homogeneous spaces; Boundeness

(责任编辑:张英健; 校对:沈建新)