

$X \oplus Y$ 和 K 空间的凸性与 K 光滑性

薛建明

(中山大学 数学与计算科学学院, 广州 510275)

摘要: 给出了 Banach 空间 X, Y 的和空间 $X \oplus Y$ 与空间 X, Y 的两种 K 凸性和 K 光滑性的关系, 并得到了 Banach 空间 $X \oplus Y$ 与 X, Y 的两种对偶关系。

关键词: K 一致凸; K 一致光滑; K 一致极凸; K 一致极光滑

中图分类号: O177.2 **文献标识码:** A **文章编号:** 1671-5322(2009)01-0019-03

1 引言与定义

在许多关于 Banach 空间几何理论的论文中已经定义了空间的 K 光滑性以及它们和 K 凸性的对偶性, 文[1]研究了空间 $X \oplus Y$, 当 X, Y 是 Banach 空间时, 讨论了空间 $X \oplus Y$ 与 X, Y 的凸性与光滑性的关系, 受此启发, 笔者讨论了 Banach 空间 $X \oplus Y$ 与 X, Y 的 K 一致凸、 K 一致光滑、 K 一致极凸、 K 一致极光滑的关系, 推广了文献[5]中的结论, 并得到了 Banach 空间 $X \oplus Y$ 与 X, Y 的两种对偶关系。

本文所涉及的空间 X, Y 均为实 Banach 空间, X^*, Y^*, X^{**}, Y^{**} 分别表示 X, Y 的对偶, 二次对偶, 采用以下符号:

$$S(X) = \{x: x \in X, \|x\| = 1\}, S(X^*) = \{f: f \in X^*, \|f\| = 1\}$$

$$S_x = \{f: f \in S(X^*), f(x) = \|x\| = 1\}, A_f = \{x: x \in S(X), f(x) = \|f\| = 1\}$$

对任意的 $x_1, x_2, \dots, x_{k+1} \in S(X)$, 记

$$A(x_1, x_2, \dots, x_{k+1}) = \sup \left\{ \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ f_1(x_1) & \cdots & f_1(x_{k+1}) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ f_k(x_1) & \cdots & f_k(x_{k+1}) \end{vmatrix}, f_i \in S(X^*), i = 1, 2, \dots, k \right\}$$

对任意的 $f_1, f_2, \dots, f_{k+1} \in S(X^*)$, 记

$$B(f_1, f_2, \dots, f_{k+1}) = \sup \left\{ \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ f_1(x_1) & \cdots & f_1(x_{k+1}) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ f_k(x_1) & \cdots & f_k(x_{k+1}) \end{vmatrix}, x_i \in S(X), i = 1, 2, \dots, k \right\}$$

由 Goldstine - Weson 稠密性定理易证,

$$A(f_1, f_2, \dots, f_{k+1}) = B(f_1, f_2, \dots, f_{k+1})$$

定义 1.1^[5] 设 X, Y 是赋范线性空间, 则它们的和定义为 $\{(x, y) | x \in X, y \in Y\}$ 。记为: $X \oplus Y$ 。其中对 $\forall x_1, x_2 \in X, y_2 \in X, \alpha \in K$ 加法与数乘运算及范数定义为:

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2),$$

$$\alpha(x_1, y_1) = (\alpha x_1, \alpha y_1),$$

收稿日期: 2008-12-10

作者简介: 薛建明(1982-), 女, 山东聊城人, 硕士研究生, 主要研究方向为泛函分析。

$$\|(X_1, y_1)\| = \|X_1\| + \|y_1\|$$

定义 1.2^[1] 称 X 是 K -一致凸空间, 若对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta(\varepsilon) > 0$, 使得当 $x_1, x_2, \dots, x_{k+1} \in S(X)$, $\|\sum_{i=1}^{k+1} x_i\| > (k+1) - \delta$ 时, 有 $A(x_1, x_2, \dots, x_{k+1}) < \varepsilon$ 。

定义 1.3^[2] 称 X 是 K -一致光滑空间, 若对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta(\varepsilon) > 0$, 使得当 $f_1, f_2, \dots, f_{k+1} \in S(X^*)$, $\|\sum_{i=1}^{k+1} f_i\| > (k+1) - \delta$ 时, 有 $B(f_1, f_2, \dots, f_{k+1}) < \varepsilon$ 。

定义 1.4^[4] 称 X 是 K -一致极凸空间, 若对任意的 $f \in S(X^*)$, $x_{1n}^{**}, x_{2n}^{**}, \dots, x_{(k+1)n}^{**} \in S(X^{**})$

当 $x_{in}^{**}(f) \rightarrow 1$ 时, 有 $A(x_{1n}^{**}, x_{2n}^{**}, \dots, x_{(k+1)n}^{**}) \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$ 。

定义 1.5^[4] 称 X 是 K -一致极光滑空间, 若对任意的 $x^{**} \in S(X^{**})$, $f_{1n}, f_{2n}, \dots, f_{(k+1)n} \in S(X^*)$, $x^{**}(f_{in}) \rightarrow 1$ 时, 有 $A(f_{1n}, f_{2n}, \dots, f_{(k+1)n}) \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$ 。

2 主要结果

引理 2.1^[5] 设 X, Y 是实 Banach 空间, 则空间 $(X \oplus Y)^*$ 与空间 $X^* \oplus Y^*$ 是同构的, 且对应为

$$F \in (X \oplus Y)^* \rightarrow (F_X, F_Y) \in X^* \oplus Y^*$$

其中 $F_X(x) = F(x, 0)$, $F_Y(y) = F(0, y)$, $x \in X, y \in Y$ 。容易验证 $(X \oplus Y)^* = X^* \oplus Y^*$ 。

引理 2.2^[2] 若 X^* 是 K -一致凸空间 (K -一致光滑空间) 当且仅当 X 是 K -一致光滑空间 (K -一致凸空间)。

引理 2.3^[4] 若 X^* 是 K -一致极凸空间 (K -一致极光滑空间) 当且仅当 X 是 K -一致极光滑空间 (K -一致极凸空间)。

由空间 $X \oplus Y$ 的定义以及引理 2.1 我们可以得到空间 $X \oplus Y$ 与空间 X, Y 的 K -一致凸, K -一致极凸的关系。

定理 2.1 $X \oplus Y$ 为 K -一致凸空间, 则 X, Y 都为 K -一致凸空间。

证明: 只要证明 X 是 K -一致凸空间。对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta(\varepsilon) > 0$, 使得当 $x_1, x_2, \dots, x_{k+1} \in S(X)$,

$\|\sum_{i=1}^{k+1} x_i\| > (k+1) - \delta$ 时, 待证 $A(x_1, x_2, \dots, x_{k+1}) < \varepsilon$ 。令

$$P_1 = (x_1, 0), P_2 = (x_2, 0), \dots, P_{k+1} = (x_{k+1}, 0),$$

则 $P_1, P_2, \dots, P_{k+1} \in S(X \oplus Y)$ 且 $\|\sum_{i=1}^{k+1} P_i\| = \|\sum_{i=1}^{k+1} x_i\| > (k+1) - \delta$

因为 $X \oplus Y$ 为 K -一致凸空间, 所以对上述 $\varepsilon, \delta(\varepsilon)$ 有

$$\begin{aligned} \varepsilon &> A(P_{1n}, P_{2n}, \dots, P_{(k+1)n}) = \\ &\sup \left\{ \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ F_1(P_{1n}) & \cdots & F_1(P_{(k+1)n}) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ F_k(P_{1n}) & \cdots & F_k(P_{(k+1)n}) \end{vmatrix}, F_i \in S((X \oplus Y)^*), i = 1, 2, \dots, k \right\} = \\ &\sup \left\{ \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ F_1^X(P_{1n}) & \cdots & F_1^X(P_{(k+1)n}) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ F_k^X(P_{1n}) & \cdots & F_k^X(P_{(k+1)n}) \end{vmatrix}, F_i^X \in S(X^*), i = 1, 2, \dots, k \right\} = A(x_{1n}, x_{2n}, \dots, x_{(k+1)n}) \end{aligned}$$

从而 X 为 K -一致凸空间。于是定理得证。

注: 定理 2.1 的逆是不成立的。例如: 当 $K=1$ 时, 把定义 1.1 中的和范数取为 $\|(x_1, y_1)\| = \min\{\|x_1\|, \|y_1\|\}$ 时, 显然 $X \oplus Y$ 非严格凸, 那么 $X \oplus Y$ 就不是一致凸的。

定理 2.2 $X \oplus Y$ 为 K -一致极凸空间, 则 X, Y 都为 K -一致极凸空间。

证明: 只要证明 X 是 K -一致极凸空间。对任意的 $f \in S(X^*)$, $x_{1n}^{**}, x_{2n}^{**}, \dots, x_{(k+1)n}^{**} \in S(X^{**})$, 当 $x_{in}^{**}(f) \rightarrow 1$ 时, 待证 $A(x_{1n}^{**}, x_{2n}^{**}, \dots, x_{(k+1)n}^{**}) \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$ 。令 $F = (f, 0)$, $F_{1n}^{**} = (x_{1n}^{**}, 0)$, $F_{2n}^{**} = (x_{2n}^{**}, 0), \dots$,

$F_{(k+1)n}^{**} = (x_{(k+1)n}^{**}, 0) \in S((X \oplus Y)^{**})$, 且 $F_{in}^{**}(F) = x_{in}^{**}(f) \rightarrow 1$

因为 $X \oplus Y$ 为 K 一致极凸空间, 所以当 $n \rightarrow \infty$ 时

$$0 \leftarrow A(F_{1n}^{**}, F_{2n}^{**}, \dots, F_{(k+1)n}^{**}) =$$

$$\sup \left\{ \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ G_1(F_{1n}^{**}) & \dots & G_1(F_{(k+1)n}^{**}) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ G_k(F_{1n}^{**}) & \dots & G_k(F_{(k+1)n}^{**}) \end{vmatrix}, G_i \in S((X \oplus Y)^{**}), i = 1, 2, \dots, k \right\} =$$

$$\sup \left\{ \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ G_1^X(x_{1n}^{**}) & \dots & G_1^X(x_{(k+1)n}^{**}) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ G_k^X(x_{1n}^{**}) & \dots & G_k^X(x_{(k+1)n}^{**}) \end{vmatrix}, G_i^X \in S(X^{***}), i = 1, 2, \dots, k \right\} = A(x_{1n}^{**}, x_{2n}^{**}, \dots, x_{(k+1)n}^{**})$$

从而 X 为 K 一致极凸空间。于是定理得证。

注: 定理 2.2 的逆是不成立的。例如: 当 $K=1$ 时, 把定义 1.1 中的和范数取为 $\|(x_1, y_1)\| = \min\{\|x_1\|, \|y_1\|\}$ 时, 显然 $X \oplus Y$ 非严格凸, 那么 $X \oplus Y$ 就不是一致极凸的。

由引理 2.2, 2.3 以及定理 2.1, 2.2 我们可以得到空间 $X \oplus Y$ 与空间 X, Y 的 K 一致光滑, K 一致极光滑的关系:

定理 2.3 $X \oplus Y$ 为 K 一致光滑空间, 则 X, Y 都为 K 一致光滑空间。

证明: 因为 $X \oplus Y$ 为 K 一致光滑空间, 由引理 2.2 可知 $(X \oplus Y)^*$ 是 K 一致凸空间, 又由引理 2.1 可知 $X^* \oplus Y^*$ 是 K 一致凸空间, 最后由引理 2.2 可知 X, Y 都为 K 一致光滑空间。

定理 2.4 $X \oplus Y$ 为 K 一致极光滑空间, 则 X, Y 都为 K 一致极光滑空间。

注: 定理 2.4 的证明类似于定理 2.3 的证明, 此处从略。

最后我们由前面的引理及定理可以得到空间 $X \oplus Y$ 与 X, Y 的下列对偶关系:

定理 2.5 $(X \oplus Y)^*$ 是 K 一致凸空间 (K 一致光滑空间), 则 X, Y 都为 K 一致光滑空间 (K 一致凸空间)。

定理 2.6 $(X \oplus Y)^*$ 是 K 一致极凸空间 (K 一致极光滑空间), 则 X, Y 都为 K 一致极光滑空间 (K 一致极凸空间)。

参考文献:

- [1] Sullivan F. A generalization of uniformly rotund Banach spaces[J]. Canad J Math, 1979, 31: 628 - 636.
- [2] Suyalatu, Wu Congxin. K - uniformly rotund spaces and K - uniformly smooth space[J]. Chinese Science Bulletin, 1998, 43 (2): 92 - 95.
- [3] Smith M A, Sullivan F. Extremely smooth Banach space[J]. Lecture Notes in Math, 1997, 604: 125 - 137.
- [4] 吴红霞, 苏雅拉图. K 一致极凸空间与 K 一致极光滑空间[J]. 内蒙古师范大学学报, 2004, 33(4): 372 - 376.
- [5] 林洁珠. 连续双线性泛函与凸性理论[D]. 广州: 中山大学, 2005.
- [6] 刘世伟. 某些 Banach 空间的很极光滑性与一致极光滑性[J]. 华中师范大学报, 1989, 23(2): 163 - 166.

K - convexity and K - smoothness of $X \oplus Y$

XUE Jian-ming

(School of Mathematics & Computer Science of Sun Yat - sen University, Guangzhou 510275, China)

Abstract: Two relations and two dual notions of K - convexity and K - smoothness between $X \oplus Y$ and X, Y are given in the paper.

Keywords: K - uniformly convex; K - uniformly smooth; K - uniformly extremely convex; K - uniformly extremely smooth

(责任编辑: 张英健; 校对: 沈建新)