

# 求解一维对流扩散方程的一种三层有限差分格式

黄素珍

(盐城工学院 基础教学部,江苏 盐城 224003)

摘要:通过指数变换将方程变形,消去方程中的“对流项”,再利用反指数变换和待定系数法,构造了求解一维对流扩散方程的一种三层差分格式。采用 Von Neumann 方法分析了差分格式的稳定性,得到了格式稳定的充分必要条件。

关键词:三层有限差分格式;对流扩散方程;稳定性;数值模拟

中图分类号:O241.8 文献标识码:A 文章编号:1671-5322(2009)01-0022-04

在此,我们先考虑一维对流扩散问题

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + k \frac{\partial u}{\partial x} = d \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, 0 < x < 1, 0 < t \leq T & (1) \\ u(x, 0) = f(x), 0 \leq x \leq 1 & (2) \\ u(0, t) = g_0(t), u(1, t) = g_1(t), 0 < t \leq T & (3) \end{cases}$$

这里  $f, g_0, g_1$  是已知函数,而  $u$  是未知函数。其中  $k, d$  为大于零的常数。

对流扩散方程的数值解法一直是计算数学中重要的研究内容,人们在几十年的时间里对它进行了进一步的研究和应用<sup>[1-6]</sup>。然而标准的差分方法或有限元方法对它常常失效,其根本原因在于对流项的存在。本文采用先通过指数变换将方程变形,消去方程中的对流项,而变形以后的方程是一般的扩散方程,它已经有了许多有效的数值解法<sup>[7]</sup>,我们将以此为基础,构造求解一维对流扩散方程的三层差分格式。采用 Von Neumann 方法分析了差分格式的稳定性,得到了格式稳定的充分必要条件。

## 1 指数变换

为了消去方程中的对流项,我们令  $u = e^{\alpha x + \beta t} v$ ,

$$\text{则有 } \frac{\partial u}{\partial t} = \left(\beta v + \frac{\partial v}{\partial t}\right) e^{\alpha x + \beta t}, \frac{\partial u}{\partial x} = \left(\alpha v + \frac{\partial v}{\partial x}\right) e^{\alpha x + \beta t},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \left(\alpha^2 v + 2\alpha \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right) e^{\alpha x + \beta t}.$$

将上述导数代入(1)式,得

$$\frac{\partial v}{\partial t} + (k - 2\alpha d) \frac{\partial v}{\partial x} = d \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + (d\alpha^2 - k\alpha - \beta)v$$

$$\text{若令 } \begin{cases} k - 2\alpha d = 0 \\ d\alpha^2 - k\alpha - \beta = 0 \end{cases}, \text{ 即当 } \begin{cases} \alpha = \frac{k}{2d} \\ \beta = -\frac{k^2}{4d} \end{cases} \text{ 时, (1)}$$

式转化为下述形式:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = d \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad (4)$$

## 2 差分格式的建立

首先建立差分网格:取空间步长  $h > 0$ , 节点  $x_j = jh, j = 0, 1, 2, \dots, M = [1/h]$ , 时间步长  $\tau > 0$ , 节点  $t_n = n\tau, n = 0, 1, 2, \dots, N = [T/\tau]$ . 为了讨论方便,我们假设  $k > 0, d > 0$ .

### 2.1 FTCS 格式(两层格式)

我们分别对(4)中的时间导数项用向前差商、空间导数项用中心差商来进行近似离散,从而得到如下形式的两层差分格式,简记为 FTCS 格式。

$$\frac{V_i^{n+1} - V_i^n}{\tau} = d \frac{V_{i+1}^n - 2V_i^n + V_{i-1}^n}{h^2} \quad (5)$$

令  $r = d \frac{\tau}{h^2}$ , 则

$$V_i^{n+1} = V_{i+1}^n + (1 - 2r)V_i^n + rV_{i-1}^n \quad (6)$$

利用反变换  $V = e^{-(\alpha x + \beta t)} U$  得到方程(1)的差分格式

$$U_i^{n+1} = e^{\beta\tau} [r(e^{-\alpha h} U_{i+1}^n + e^{\alpha h} U_{i-1}^n) + (1 - 2r)U_i^n] \quad (7)$$

通常,格式(7)可用图1表示。

收稿日期:2008-09-20

作者简介:黄素珍(1976-),女,江苏大丰市人,讲师,硕士,主要研究方向为微分方程数值解。

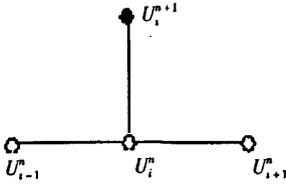


图 1 两层差分格式示意图

Fig. 1 Two-level finite difference technique

我们用 Fourier 方法分析该格式的稳定性,不难求得,该格式的增长因子为

$$G = e^{\rho r} [r(e^{-ah}e^{i\sigma h} + e^{ah}e^{-i\sigma h}) + (1 - 2r)]$$

显然,欲使  $|G| \leq 1$ , 只要  $r \leq \frac{1}{2}$ 。故差分格式

(7) 稳定的条件为  $0 < r \leq \frac{1}{2}$ 。

差分格式(7)的修正等价偏微分方程为

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + k \frac{\partial u}{\partial x} - d \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{h^2}{12}(1 - 6r) \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - \\ \frac{h^4}{360}(1 - 30r + 120r^2) \frac{\partial^6 u}{\partial x^6} + O(h^6) = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

由式(8)知:当  $r > 0$  且  $r \neq \frac{1}{6}$  时,该格式的截

断误差阶为  $O(h^2)$ ; 当  $r = \frac{1}{6}$  时,该格式的截断误差阶为  $O(h^4)$ , 无数值扩散。

## 2.2 一个六阶精度(3,3,3)差分格式

### 2.2.1 (3,3,3)差分格式的建立

我们用待定系数法构造(4)的如下形式的三层差分格式:

$$\begin{aligned} L_h V_j^n = \frac{1}{\tau \sum_l (a_l + c_l)} \sum_l (a_l V_{j+l}^{n+1} - \\ b_l V_{j+l}^n - c_l V_{j+l}^{n-1}) = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

其中  $l \in \Omega \setminus \{-N, \dots, -1, 0, 1, \dots, N\}$ ,  $a_l, b_l,$

$c_l$  是  $r$  的函数。记  $A = \sum_l (a_l + c_l) \neq 0$ 。

对于(4)的充分光滑的解代入式(9)中,并将  $v(x_j + lh, t_{n+1}), v(x_j + lh, t_n), v(x_j + lh, t_{n-1})$ , 在  $(x_j, t_n)$  点用 Taylor 级数展开,且注意到  $v_i^{(m)} = d^m v_x^{(m)}$ 。

$$\begin{cases} v(x_j + lh, t_n + \tau) = \\ v + D_1 v + \frac{1}{2!} D_1^2 v + \dots + \frac{1}{m!} D_1^m v + \dots \\ v(x_j + lh, t_n - \tau) = \\ v + D_2 v + \frac{1}{2!} D_2^2 v + \dots + \frac{1}{m!} D_2^m v + \dots \\ v(x_j + lh, t_n) = \\ v + lh v'_x + \frac{(lh)^2}{2!} v''_x + \dots + \frac{(lh)^m}{m!} v_x^{(m)} + \dots \end{cases} \quad (10)$$

其中  $D_1 = \left( lh \frac{\partial}{\partial x} + \tau \frac{\partial}{\partial t} \right), D_2 = \left( lh \frac{\partial}{\partial x} - \tau \frac{\partial}{\partial t} \right)$ 。且式(10)右端  $v$  及其各阶导数均表示在  $(x_j, t_n)$  处取值。

将式(10)代入式(9),经整理后得

$$\begin{aligned} L_h v(x_j, t_n) = \\ \frac{1}{\tau A} \sum_l [(a_l - b_l - c_l)v + lh(a_l - b_l - c_l)v'_x \\ + \tau(a_l + c_l)v'_t + \frac{(lh)^2}{2!}(a_l - b_l - c_l)v''_x] + \\ \frac{1}{\tau A} \sum_{m=3}^{\infty} \bar{c}_m h^m v_x^{(m)} \end{aligned} \quad (11)$$

其中

$$\begin{aligned} \bar{c}_m = \sum_l (a_l - b_l - c_l) \frac{l^m}{m!} + \\ \sum_{p=1}^{[m/2]} \sum_l [a_l + (-1)^{p+1} c_l] \frac{r^p l^{m-2p}}{(m-2p)!} \end{aligned} \quad (12)$$

注:  $[m/2]$  表示取  $m/2$  的整数部分。

在式(11)中,如使

$$\begin{cases} \bar{c}_0 = \sum_l (a_l - b_l - c_l) = 0 \\ \bar{c}_1 = \sum_l (a_l - b_l - c_l)l = 0 \\ \bar{c}_2 = \sum_l (a_l - b_l - c_l) \frac{l^2}{2!} + r \sum_l (a_l + c_l) = 0 \end{cases} \quad (13)$$

则有

$$L_h v(x_j, t_n) = v'_t - d v''_x + \frac{1}{\tau A} \sum_{m=3}^{\infty} \bar{c}_m h^m v_x^{(m)} \quad (14)$$

故有

$$\begin{aligned} R_j^n(v) = L_h v(x_j, t_n) - L v(x_j, t_n) = \\ \frac{1}{\tau A} \sum_{m=3}^{\infty} \bar{c}_m h^m v_x^{(m)} \end{aligned} \quad (15)$$

由上述讨论易得下列定理:

定理 1 差分算子  $L_h$  与微分算子  $L$  相容的充要条件为  $\bar{c}_0 = 0, \bar{c}_1 = 0, \bar{c}_2 = 0$ 。

定理 2 如果横向对称节点系数对称,即  $a_l$

$= a_{-1}, b_l = b_{-1}, c_l = c_{-1}$ , 则有  $\bar{c}_{2q+1} = 0, q = 0, 1, \dots$ 。

为得到高精度差分格式, 今取  $a_{-1} = a_1 = c_{-1} = c_1 = r(1 - 60r^2)$ , 使  $\bar{c}_0 = \bar{c}_2 = \bar{c}_4 = \bar{c}_6 = 0$ , 解方程组得

$$\begin{cases} a_0 = 120r^3 + 120r^2 + 28r + 3 \\ b_0 = 6(20r^2 + 1) \\ b_1 = 60r^2 \\ c_0 = 120r^3 - 120r^2 + 28r - 3 \end{cases} \quad (16)$$

将式(16)代入式(9)、(12)得

$$\begin{aligned} & (120r^3 + 120r^2 + 28r + 3)V_j^{n+1} + \\ & r(1 - 60r^2)(V_{j-1}^{n+1} + V_{j+1}^{n+1}) = \\ & 6(20r^2 + 1)V_j^n + 60r^2(V_{j-1}^n + V_{j+1}^n) + \\ & (120r^3 - 120r^2 + 28r - 3)V_j^{n-1} + \\ & r(1 - 60r^2)(V_{j-1}^{n-1} + V_{j+1}^{n-1}) \end{aligned} \quad (17)$$

$$\sum_l (a_l + c_l) = 60r \quad (18)$$

$$\begin{aligned} & R_j^n(v) = \\ & -\frac{1}{60}(10r^4 - \frac{1}{4}r^2 - \frac{13}{5040})h^6 [v_x^{(8)}]_j^n + O(h^8) \end{aligned} \quad (19)$$

利用反变换  $V = e^{-(\alpha x + \beta t)}U$ , 得

$$\begin{aligned} & (120r^3 + 120r^2 + 28r + 3)e^{-\beta\tau}U_j^{n+1} + \\ & r(1 - 60r^2)e^{-\beta\tau}(e^{\alpha h}U_{j-1}^{n+1} + e^{-\alpha h}U_{j+1}^{n+1}) = \\ & 6(20r^2 + 1)U_j^n + 60r^2(e^{\alpha h}U_{j-1}^n + e^{-\alpha h}U_{j+1}^n) + \\ & (120r^3 - 120r^2 + 28r - 3)e^{\beta\tau}U_j^{n-1} + \\ & r(1 - 60r^2)e^{\beta\tau}(e^{\alpha h}U_{j-1}^{n-1} + e^{-\alpha h}U_{j+1}^{n-1}) \end{aligned} \quad (20)$$

当  $h \rightarrow 0, \tau \rightarrow 0$  时, 由式(19)知, 式(20)是一个六阶差分格式。

由于格式(20)包括如图 2 所示的九个节点, 故该格式又称为(3, 3, 3)格式。

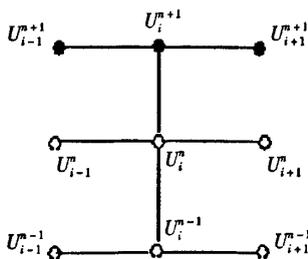


图 2 三层差分格式示意图

Fig. 2 Three-level finite difference technique

### 2.2.2 稳定性分析

为证稳定性, 先引进

引理<sup>[8]</sup> 实系数二次方程  $Ax^2 + Bx + C =$

$0 (A > 0)$  的两个根位于单位圆内或圆上, 且一个根严格地在单位圆内的充要条件是:

$$\begin{cases} A - C > 0 \\ A + B + C \geq 0 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} A - C > 0 \\ A - B + C \geq 0 \end{cases} \quad (21)$$

现用 Fourier 方法证明差分格式(20)的稳定性。不难求得, 增长矩阵为

$$G = \begin{bmatrix} -B/A & -C/A \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (22)$$

其中

$$\begin{cases} A = 240r^2 \sin^2 \frac{\sigma h}{2} + 4r \cos^2 \frac{\sigma h}{2} + 120r \\ B = 240r^2 \sin^2 \frac{\sigma h}{2} - 240r^2 - 6 \\ C = 4r(1 - 60r^2) \sin^2 \frac{\sigma h}{2} + 120r^2 - 30r + 3 \end{cases} \quad (23)$$

$G$  的特征方程为  $A\lambda^2 + B\lambda + C = 0$ , 易得

$$\begin{cases} A - C = 480r^3 \sin^2 \frac{\sigma h}{2} + 8r \cos^2 \frac{\sigma h}{2} + 52r > 0 \\ A + B + C = 240r^2 \sin^2 \frac{\sigma h}{2} \geq 0 \\ A - B + C = 240r^2 \left(1 + \cos^2 \frac{\sigma h}{2}\right) + 12 > 0 \end{cases} \quad (24)$$

以上三个不等式对任意  $r > 0$  均成立, 故  $G$  的特征值按模都小于或等于 1, 且有一个严格地小于 1。故差分格式(20)绝对稳定。

### 3 数值试验

考虑定解问题

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + k \frac{\partial u}{\partial x} = d \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & (0 < x < 1, 0 < t < T, d > 0) \\ u(x, 0) = 0 & (0 < x < 1) \\ u(0, t) = 0, u(1, t) = 1 & (0 < t < T) \end{cases} \quad (25)$$

其精确解是<sup>[9]</sup>

$$u(x, t) = \frac{e^{kx/d} - 1}{e^{k/d} - 1} +$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m m \pi}{(m \pi)^2 + \left(\frac{k}{2d}\right)^2} e^{k(x-1)/2x} \sin(m \pi x) e^{-[(m \pi)^2 d + k^2/4d]t} \quad (26)$$

我们对此分别基于 FTCS 格式和(3, 3, 3)差分格式, 取  $k = 1.0, h = 0.02, \tau = 0.004$ , 在  $d = 1.0$  和  $d = 0.01$  两种情况下计算  $t = 0.4$  时的数值结

果,其结果分别列在表1和表2中。

结果表明本文提出的(3,3,3)差分格式是求

解对流扩散问题尤其是对流占优扩散问题的一种有效的三层差分格式。

表1  $k=1.0$   $d=1.0$   $\tau=0.004$   $h=0.02$   
 $t=0.4$ 时的数值结果

Table 1 Numerical errors of two finite difference schemes while  $d=1.0$

$j(x_j)$	FTCS	(3,3,3)格式		精确解
	格式	绝对误差	相对误差	
5		0.002 416	0.040 174	0.060 139
10		0.004 88	0.038 51	0.126 72
15		0.00719	0.035 857	0.200 52
20		0.009 11	0.032 258	0.282 41
25	不稳定	0.010 44	0.027 965	0.373 32
30		0.010 97	0.023 132	0.474 23
35		0.010 56	0.018 014	0.586 21
40		0.009 03	0.012 712	0.710 35
45		0.005 79	0.006 829	0.847 86

表2  $k=1.0$   $d=0.01$   $\tau=0.004$   $h=0.02$   $t=0.4$ 时的数值结果

Table 2 Numerical errors of two finite difference schemes while  $d=0.01$

$j(x_j)$	FTCS 格式		(3,3,3)格式		精确解
	绝对误差	相对误差	绝对误差	相对误差	
5	1.45E-40	3.52E-01	5.00E-42	1.21E-02	4.12E-40
10	3.28E-36	3.64E-01	0.00E+00	0.00E+00	9.02E-36
15	7.30E-32	3.67E-01	0.00E+00	0.00E+00	1.99E-31
20	1.80E-27	4.04E-01	2.00E-29	4.49E-03	4.45E-27
25	5.20E-23	4.68E-01	1.00E-24	9.01E-03	1.11E-22
30	1.30E-18	3.96E-01	4.00E-20	1.22E-02	3.28E-18
35	2.33E-14	2.63E-01	5.00E-16	5.64E-03	8.87E-14
40	3.30E-10	1.61E-01	0.00E+00	0.00E+00	2.05E-09
45	3.50E-06	7.71E-02	0.00E+00	0.00E+00	4.54E-05

#### 参考文献:

- [1] Douglas J, Russell T F. Numerical methods for convection - dominated diffusion problem based on combining the method of characteristics with finite element or finite difference procedures[J]. SIAM J Numer Anal, 1982, 19(5): 871 - 885.
- [2] 王文治. 求解扩散方程的一类交替分组显式方法[J]. 山东大学学报, 2002, 37(3): 194 - 199.
- [3] 陆金甫, 杜正平, 刘晓遇. 对流占优扩散问题的一种特征差分方法[J]. 清华大学学报: 自然科学版, 2002, 42(8): 35 - 37.
- [4] 秦新强, 李秋芳. 对流占优扩散方程一种新的特征差分算法[J]. 高等学校计算数学学报, 2004, 19(3): 161 - 167.
- [5] 黄素珍, 张鲁明. 对流扩散方程的一种高精度特征差分格式[J]. 南京师大学报: 自然科学版, 2005, 28(2): 38 - 41.
- [6] Mehdi Dehghan. Weighted finite difference techniques for the one - dimensional advection - diffusion equation[J]. Applied Mathematics and Computation. 2004, 147(2): 307 - 319.
- [7] Mehdi Dehghan. Three - level techniques for one - dimensional parabolic equation with nonlinear initial condition[J]. Applied Mathematics and Computation. 2004, 151(1): 567 - 579.
- [8] 里奇特迈尔 R D. 初值问题的差分方法[M]. 何旭初, 译. 北京: 科学出版社, 1966: 100.
- [9] D J Evans, A R Abdullah. A New Explicit Method for the Diffusion - convection Equations[J]. Comp and Math with Appl, 1985, 11: 145 - 154.

## Three - level Finite Difference Technique for the One - dimensional Advection - diffusion Equation

HUANG Su-zhen

(Department of Fundamental Sciences, Yancheng Institute of Technology, Jiangsu Yancheng 224003, China)

**Abstract:** Various numerical techniques will be developed and compared for solving one - dimensional advection - diffusion equation with constant coefficient. These techniques are based on the exponent transform. It allows direct and simple comparison of the errors associated with the equations as well as providing a means to develop more accurate finite difference schemes. The new method is more accurate and is more efficient than the conventional technique. The scheme is free of numerical diffusion. The results of a numerical experiment are presented, and the accuracy is discussed and compared.

**Keywords:** three - level finite difference technique; advection - diffusion equation; stability; numerical differentiation

(责任编辑:张英健;校对:沈建新)