

Cauchy - Schwarz 不等式的推广及其在矩阵分析中的应用

陆 媛

(盐城工学院 基础教学部, 江苏 盐城 224051)

摘要:首先推广了 Cauchy - Schwarz 不等式, 然后将推广了的 Cauchy - Schwarz 不等式应用到矩阵分析中, 得到了两个重要的结论。

关键词:Cauchy - Schwarz 不等式; 广义化; 矩阵分析

中图分类号:0241.6 **文献标识码:**A **文章编号:**1671 - 5322(2009)01 - 0026 - 02

1 引言与符号约定

Cauchy - Schwarz 不等式是一个非常基本的不等式, 也是一个被经常使用的不等式, 例如在矩阵的特征值估计^[1-2]、在统计线性模型参数估计以及证明内积性质和概率论的方差和协方差性质时, 都要用到 Cauchy - Schwarz 不等式。本文首先给出 Cauchy - Schwarz 不等式的几个推广形式, 然后将推广了的 Cauchy - Schwarz 不等式应用到矩阵分析中, 得到了两个重要的结论。

本文用 R 表示实数域, C 表示复数域, R 和 C 上 n 阶矩阵的全体分别记为 $R^{n \times n}$ 和 $C^{n \times n}$, $A^* = \overline{A'}$ 表示 A 的共轭转置, 用 α 和 I_n 分别表示 C 上任意 n 维四元数列向量和 n 阶单位矩阵, $\bar{a}$ 表示 a 的共轭复数, α^* 表示 α 的共轭转置向量。 $n \times n$ 阶正定矩阵的全体记为 $C(n, >)$, $n \times n$ 阶半正定矩阵的全体记为 $C(n, \geq)$ 。

Cauchy - Schwarz 不等式有 3 种基本形式:

① 对于任意的复数序列 $x_1, x_2, \dots, x_n \in C$ 和 $y_1, y_2, \dots, y_n \in C$, 有

$$\left| \left(\sum_{k=1}^n x_k y_k \right) \right|^2 \leq \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^2 \right) \left(\sum_{k=1}^n |y_k|^2 \right)$$

即, 令 $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in C^{n \times 1}$, $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T \in C^{n \times 1}$, 有

$$|X^* Y|^2 \leq |X^* X| \cdot |Y^* Y|$$

② 令 $A \in C(n, >)$, $X, Y \in C^{n \times 1}$, 有

$$|X^* Y|^2 \leq X^* A X \cdot Y^* A^{-1} Y$$

③ 令 $A \in C(n, \geq)$, $X, Y \in C^{n \times 1}$, 于是

$$|X^* A Y|^2 \leq X^* A X \cdot Y^* A Y$$

由③可知, $X, Y \in C^{n \times 1}$ 为任意的一对列向量。我们要讨论的是当 $X, Y \in C^{n \times 1}$ 为一对正交向量时的 Cauchy - Schwarz 不等式, 它是 Cauchy - Schwarz 不等式的一种推广。

2 Cauchy - Schwarz 不等式的推广

定理 1 设 $A \in C(n, >)$, A 的特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, 且 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n > 0$, 那么对于任意一对正交向量 $X, Y \in C^{n \times 1}$, 有

$$|X^* A Y|^2 \leq \left(1 - \frac{\lambda_n}{2\lambda_1} \right) X^* A X \cdot Y^* A Y$$

证明 不失一般性, 令 $\|X\| = \|Y\| = 1$, 显然只需要证明当正交向量对 $\|X\| = \|Y\| = 1$ 时, 定理 1 成立。令

$$B = (X, Y)^* A (X, Y)$$

那么, B 是一个 2×2 的 Hermite 矩阵, 令其特征值为 $u_1 \geq u_2$, 由 Poincare 定理^[1], 有

$$\lambda_1 \geq u_1 \geq u_2 \geq \lambda_n > 0$$

所以 $B \in C(2, >)$ 。同时

$$\begin{aligned} 1 - \frac{|X^* A Y|^2}{X^* A X \cdot Y^* A Y} &= \\ 4 \frac{X^* A X \cdot Y^* A Y - |X^* A Y|^2}{(X^* A X + Y^* A Y)^2 - (X^* A X - Y^* A Y)^2} &= \\ \frac{4 \det B}{(Tr B)^2 - (X^* A X - Y^* A Y)^2} &= \\ \frac{4 \mu_1 \mu_2}{(\mu_1 + \mu_2)^2 - (\mu_1 + \mu_2 - 2 Y^* A Y)^2} &= \end{aligned}$$

收稿日期: 2008 - 08 - 19

作者简介: 陆媛 (1976 -), 女, 江苏滨海人, 讲师, 硕士, 主要研究方向为矩阵理论及计算数学。

$$\frac{\mu_1 \mu_2}{Y^* A Y (\mu_1 + \mu_2 - Y^* A Y)} \geq \frac{\mu_1 \mu_2}{Y^* A Y (\mu_1 + \mu_2)} \geq \frac{\mu_1 \mu_2}{\lambda_1 (\mu_1 + \mu_2)}$$

所以

$$\frac{|X^* A X|^2}{X^* A X \cdot Y^* A Y} \leq 1 - \frac{\mu_1 \mu_2}{\lambda_1 (\mu_1 + \mu_2)} = 1 - \frac{1}{\lambda_1 \left(\frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2} \right)}$$

又因为 $f(x) = \frac{1}{x} (x > 0)$ 是单调递减函数, 所以

$$\frac{|X^* A Y|^2}{X^* A X \cdot Y^* A Y} \leq 1 - \frac{1}{\lambda_1 \left(\frac{2}{\lambda_n} \right)} = 1 - \frac{\lambda_n}{2\lambda_1}$$

这样定理得证。

3 推广的 Cauchy - Schwarz 不等式的应用

定理2 设 $A \in C(n, >)$, A 的特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, 且 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n > 0$, 那么对于任意非零向量 $X \in C^{n \times 1}$, 有

$$\frac{(X^* A^{-1} X)(X^* A X)}{\|X\|^4} \leq \frac{2\lambda_1}{\lambda_n}$$

证明 令 $Y = \|X\|^2(A^{-1}X) - (X^* A^{-1}X)X$, 这样 $X^* Y = 0$, 同时

$$\begin{aligned} AY &= \|X\|^2 X - (X^* A^{-1} X)AX \\ X^* AY &= \|X\|^4 - (X^* A^{-1} X)(X^* AX) \\ Y^* AY &= -(X^* A^{-1} X)(Y^* AX) \quad (*) \end{aligned}$$

参考文献:

- [1] 王松桂, 吴密霞, 贾忠贞. 矩阵不等式[M]. 北京: 科学出版社, 2005.
[2] 黄廷祝, 杨传胜. 特殊矩阵分析及应用[M]. 北京: 科学出版社, 2007.

The generalization of Cauchy - Schwarz inequality and its application in matrix analysis

LU Yuan

(Department of Fundamental Sciences, Yancheng Institute of Technology, Jiangsu Yancheng 224051, China)

Abstract: The purpose of this paper is to discuss the Cauchy - Schwarz inequality and its application. Firstly, we present the generalization of Cauchy - Schwarz inequality. Then we give several applications of the generalization of Cauchy - Schwarz inequality in matrix analysis.

Keywords: Cauchy - Schwarz inequality; generalization; matrix analysis

(责任编辑: 张英健; 校对: 沈建新)

由(*)式, 我们可以得到 $Y^* A X = X^* A Y \leq 0$, 将(*)式代入定理1, 有

$$|X^* A Y|^2 \leq$$

$$\left(1 - \frac{\lambda_n}{2\lambda_1}\right) X^* A X \cdot X^* A^{-1} X \cdot (-Y^* A X)$$

因为 $X^* A Y = Y^* A X \leq 0$, 所以

$$X^* A Y \geq -\left(1 - \frac{\lambda_n}{2\lambda_1}\right) X^* A X \cdot X^* A^{-1} X$$

将上式用于 $X^* A Y = \|X\|^4 - (X^* A^{-1} X)(X^* A X)$ 中, 我们可得到

$$\|X\|^4 \geq \frac{\lambda_n}{2\lambda_1} (X^* A^{-1} X)(X^* A X)$$

即

$$\frac{(X^* A^{-1} X)(X^* A X)}{\|X\|^4} \leq \frac{\lambda_n}{2\lambda_1}$$

这样, 定理得证。

4 结论

由 Cauchy - Schwarz 不等式的形式③:

$|X^* A Y|^2 \leq X^* A X \cdot Y^* A Y$, 我们可以得到

$$\frac{|X^* A Y|^2}{X^* A X \cdot Y^* A Y} \leq 1$$

由定理1可知

$$\frac{|X^* A Y|^2}{X^* A X \cdot Y^* A Y} \leq 1 - \frac{\lambda_n}{2\lambda_1} \leq 1$$

因此本文得到的结论较 Cauchy - Schwarz 不等式精确, 所得结果更强。