

自共轭四元数矩阵的几个不等式

喻朝阳

(西昌学院 工程技术系, 四川 西昌 615013)

摘要:主要讨论了自共轭四元数矩阵的不等式问题,得到了四元数向量和四元数正定矩阵的Schwartz型不等式,在此基础上,给出了两个Rayleigh商乘积的上下界。

关键词:四元数矩阵;Schwartz型不等式;Rayleigh商

中图分类号:O241.6 **文献标识码:**A **文章编号:**1671-5322(2009)04-0021-02

四元数域是继复数域后又一新的数系,四元数域是复数域的扩张。然而,由于四元数乘法的不可交换性,造成了它与复数域上的代数理论有一定的联系,又有很大的差别,形成相对独立的内容体系。近年来,四元数代数问题已经引起了数学、物理学、计算机科学研究工作者的广泛兴趣^[1-5]。

本文主要采用如下的记号: R 和 C 分别代表实数和复数集,用 H 表示实四元数集:

$$H = \{a = a_0 + a_1i + a_2j + a_3k, a_0, a_1, a_2, a_3 \in R\}$$

对于 $a = a_0 + a_1i + a_2j + a_3k \in H$, a 的共轭为 $\bar{a} = a^* = a_0 - a_1i - a_2j - a_3k$, a 的范数为 $N(a) = \sqrt{a\bar{a}} = \sqrt{\bar{a}a} = (a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)^{1/2}$ 。记 $H^{n \times n}$ 和 $H^{n \times 1}$ 分别为 $n \times n$ 四元数矩阵和 n 维列向量的全体, I_n 表示四元数单位矩阵。对于任意的 $X \in H^{n \times 1}$, X^T 表示 X 的转置。如果 $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)^T$,那么 $\bar{X} = (\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_n)^T$ 是 X 的共轭, X 的共轭转置表示为 $X^* = (\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_n)$ 。 X 的范数被定义为 $N(X) = \sqrt{X^*X}$ 。对于任意的 $n \times n$ 阶的四元数矩阵 $A = (a_{ij})_{n \times n}$ ($a_{ij} \in H$), A 的共轭转置为 $A^* = \bar{A}^T$ 。

1 定义和引理

我们首先回顾一下几个定义和引理。

定义 1.1^[1] 设 $A \in H^{n \times n}$, 如果 $A^* = A$, 则称 A 为自共轭四元数矩阵。用 $H(n, *)$ 表示自共轭四元数矩阵的全体, $H(n, \geq)$ 表示四元数半正定

矩阵的全体, $H(n, \geq)$ 表示四元数正定矩阵的全体。

定义 1.2^[1] 设 $A \in H^{n \times n}$, 如果 $A^*A = AA^* = I_n$, 则称 A 为四元数酉矩阵, 其全体记为 $H(n, u)$ 。

定义 1.3^[1] 设 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k) \in H^{n \times k}$, $u(A) = \{X | X = AT, T \in H^{k \times 1}\}$, 则称 $u(A)$ 是 A 的右列向量张成的子空间。

引理 1.1^[1] 设 $A \in H(n, *)$, 则 A 酉相似于一个实对角矩阵, 即存在 $U \in H(n, u)$, 使得

$$U^*AU = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$$

其中, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in R$ 是 A 的特征值。

引理 1.2^[2] (广义的Schwartz不等式) 对于任意的四元数序列 $x_1, x_2, \dots, x_n \in H$ 和 $y_1, y_2, \dots, y_n \in H$, 下面的不等式成立

$$N^2\left(\sum_{k=1}^n x_k y_k\right) \leq \left(\sum_{k=1}^n N^2(x_k)\right) \left(\sum_{k=1}^n N^2(y_k)\right)$$

2 主要结果

本文的主要目的在于得到四元数正定矩阵的Schwartz型不等式, 这是对文[2]引理2的推广。

定理 2.1 设 $A \in H(n, >)$, $X, Y \in H^{n \times 1}$, 则

$$N^2(X^*Y) \leq X^*AX \cdot Y^*A^{-1}Y$$

证明: 因为 $A \in H(n, >)$, 则 $A^{-\frac{1}{2}}$ 存在。设 $W = A^{\frac{1}{2}}X, Z = A^{-\frac{1}{2}}Y$, 由引理 1.2 有

$$N^2\left(\sum_{k=1}^n x_k y_k\right) \leq \left(\sum_{k=1}^n N^2(x_k)\right) \left(\sum_{k=1}^n N^2(y_k)\right)$$

设 $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in H^{n \times 1}$, $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T \in H^{n \times 1}$, 则

收稿日期: 2009-05-04

作者简介: 喻朝阳(1971-), 男, 重庆江北人, 讲师, 硕士, 主要研究方向为代数学等。

$$N^2(X^*Y) \leq N^2(X^*X) \cdot N^2(Y^*Y)$$

所以

$$N^2(W^*Z) \leq N^2(W^*W) \cdot N^2(Z^*Z)$$

因此

$$N^2(X^*Y) \leq X^*AX \cdot Y^*A^{-1}Y \quad (1)$$

特别是,当 $X=Y$, 公式(1)等价于

$$N^2(X^*X) \leq X^*AX \cdot X^*A^{-1}X$$

即,对任意 $X \neq 0$

$$1 \leq \frac{X^*AX \cdot X^*A^{-1}X}{N^2(X^*X)} \quad (2)$$

式(2)的右半部分是 Rayleigh 商 $\frac{X^*AX}{N(X^*X)}$ 和

$\frac{X^*A^{-1}X}{N(X^*X)}$ 的乘积,定理 2.1 是它的一个下界。

定理 2.2 设 $A \in H(n, >)$, $X, Y \in H^{n \times 1}$, 则

$$N^2(X^*AY) \leq X^*AX \cdot Y^*AY$$

证明:因为 $A \in H(n, >)$, 所以存在 $B \in H^{n \times n}$, 使得 $A = B^*B$ 。设 $W = BX, Z = BY$, 对 W, Z 由引理 1.2, 可得

$$N^2(X^*AY) \leq X^*AX \cdot Y^*AY$$

定理 2.3 设 $A \in H(n, >)$, $X, Y \in H^{n \times 1}$, $Y \in u(A)$, 则

$$\sup_{\substack{Y \neq 0 \\ Y \in u(A)}} \frac{N^2(X^*Y)}{Y^*A^{-1}Y} = X^*AX$$

其中, A^{-1} 是 A 的广义逆。

证明:因为 $Y \in u(A)$, 所以存在 $T \in H^{n \times 1}$, 使得 $Y = AT$ 。由定理 2.1, 可得

$$N^2(X^*Y) = N^2(X^*AT) \leq X^*AX \cdot T^*AT = X^*AX \cdot Y^*A^{-1}Y$$

所以

$$\sup_{\substack{Y \neq 0 \\ Y \in u(A)}} \frac{N^2(X^*Y)}{Y^*A^{-1}Y} = X^*AX$$

推论 2.1 设 $A \in H(n, >)$, $X, Y \in H^{n \times 1}$, 则

$$\sup_{Y \neq 0} \frac{N^2(X^*Y)}{Y^*A^{-1}Y} = X^*AX$$

证明:直接应用定理 2.3 就可以得到此结果。

参考文献:

- [1] 庄瓦金. 体上矩阵理论导引[M]. 北京: 科学出版社, 2006.
- [2] Junliang Wu. Distribution and Estimation for Eigenvalues of Real Quaternion Matrices[J]. Computers and Mathematics with Applications. 2008, 55: 1998 - 2004.
- [3] 王庆贵. 四元数变换及其在空间机构位移分析中的应用[J]. 力学学报, 1983(1): 54 - 61.
- [4] 张光枢. 刚体有限转动合成的可交换性[J]. 力学学报, 1982(4): 363 - 368.
- [5] 李文亮. 四元数矩阵[M]. 湖南: 国防科技大学出版社, 2002.

Several inequalities of self - conjugate quaternion matrices

YU Zhao-yang

(Department of Engineering Technology, Xichang College, Sichuan Xichang 615013, China)

Abstract: The inequalities of self - conjugate quaternion matrix were discussed. The Schwartz type inequalities for quaternion positive definite matrix and the vector of quaternion were presented. Basing on the inequality above, The upper bound and lower bound for the product of two Rayleigh divisions were obtained.

Keywords: quaternion matrix; schwartz type inequality; rayleigh division

(责任编辑: 张英健; 校对: 沈建新)