

矩阵实特征值的估计

陈湘赞

(盐城工学院 基础教学部, 江苏 盐城 224051)

摘要:给出了任意矩阵的实特征值的一个新的估计,以定理形式给出结论并予以证明。同时用数值算例验证了所得结果的有效性。

关键词:特征值;估计;算例

中图分类号:0241.6

文献标识码:A

文章编号:1671-5322(2009)04-0023-02

1 符号约定

文中用 R 表示实数域, C 表示复数域, R 和 C 上 n 阶矩阵的全体分别记为 $R^{n \times n}$ 和 $C^{n \times n}$, $A^* = \overline{A'}$ 表示 A 的共轭转置。 $\|A\|_F$ 表示矩阵 A 的 F -范数, 即 $\|A\|_F = (\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\text{tr}(A^* A)}$ 。 $\text{rank} A$ 表示 A 的秩, $\text{tr} A$ 表示 A 的迹^[1-2]。

2 主要结果

对于任意复矩阵 $H = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, 其中 A 是 H 的顺序主子阵, 为了得到我们的结果, 我们先定义

$$h(H) = |\text{tr} H|^2 - (n-1)$$

$$\{ \|H\|_F^2 - \max_{1 \leq k \leq n-1} (\|B\|_F - \|C\|_F)^2 \}$$

定理 1 设 $H = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = (h_{ij})_{n \times n} \in C^{n \times n}$, 则

$$|\text{tr} H|^2 - nh(H) \geq 0$$

证明:由 $h(H)$ 的定义, 我们有

$$|\text{tr} H|^2 - nh(H) =$$

$$(1-n)|\text{tr} H|^2 + n(n-1)$$

$$\{ \|H\|_F^2 - \max_{1 \leq k \leq n-1} (\|B\|_F - \|C\|_F)^2 \} =$$

$$(n-1)\{ n\{ \|H\|_F^2 - \max_{1 \leq k \leq n-1} (\|B\|_F - \|C\|_F)^2 \} - |\text{tr} H|^2 \}$$

由 Cauchy-Schwarz 不等式和文献[1]定理 1, 可得

$$|\text{tr} H|^2 = \left| \sum_{i=1}^n \lambda_i \right|^2 \leq n \sum_{i=1}^n |\lambda_i|^2 \leq$$

$$n\{ \|H\|_F^2 - \max_{1 \leq k \leq n-1} (\|B\|_F - \|C\|_F)^2 \}$$

所以

$$|\text{tr} H|^2 - nh(H) \geq 0$$

引理得证。

定理 2 设 $H = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = (h_{ij})_{n \times n} \in C^{n \times n}$, 若 $h(H) > 0$, 则 H 为非奇异矩阵。

证明:设 H 有 s 个非零特征值, 则 $\text{rank} H \geq s$, 于是

$$|\text{tr} H|^2 = \left| \sum_{i=1}^s \lambda_i \right|^2 \leq$$

$$s \sum_{i=1}^s |\lambda_i|^2 \leq \text{rank} H \sum_{i=1}^s |\lambda_i|^2$$

所以由 $h(H) > 0$ 和 Schur 不等式, 我们可得

$$\text{rank} H \geq \frac{|\text{tr} H|^2}{\sum_{i=1}^s |\lambda_i|^2} \geq \frac{|\text{tr} H|^2}{\|H\|_F^2} >$$

$$\frac{(n-1)\{ \|H\|_F^2 - \max_{1 \leq k \leq n-1} (\|B\|_F - \|C\|_F)^2 \}}{\|H\|_F^2 - \max_{1 \leq k \leq n-1} (\|B\|_F - \|C\|_F)^2} \geq n-1$$

故 H 为非奇异矩阵。

定理 3 设 $H = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = (h_{ij})_{n \times n} \in C^{n \times n}$, 若 $h(H) > 0$, 则 H 的实特征值 λ 满足

$$\frac{h(H)}{\text{tr} H + \sqrt{(\text{tr} H)^2 - nh(H)}} \leq \lambda(H) \leq$$

$$\frac{h(H)}{\text{tr} H - \sqrt{(\text{tr} H)^2 - nh(H)}}$$

证明:令二次不等式

收稿日期:2009-06-18

作者简介:陈湘赞(1972-),女,江苏盐城人,讲师,硕士,主要研究方向为应用数学。

$$f(x) = h(H)x^2 - 2(\text{tr}H)x + n \leq 0$$

我们首先考虑不等式的解的情况,由 $h(H) > 0$ 和定理 1, 可得上述不等式有实根. 设 λ 是 H^{-1} 的任一实特征值, 则必定有

$$h(H)\lambda^2 - 2(\text{tr}H)\lambda + n \leq 0 \quad (1)$$

所以, 由(1)可得

$$\frac{\text{tr}H - \sqrt{(\text{tr}H)^2 - nh(H)}}{h(H)} \leq \lambda(H^{-1}) \leq$$

$$\frac{\text{tr}H + \sqrt{(\text{tr}H)^2 - nh(H)}}{h(H)}$$

即

$$\frac{h(H)}{\text{tr}H + \sqrt{(\text{tr}H)^2 - nh(H)}} \leq \lambda(H) \leq \frac{h(H)}{\text{tr}H - \sqrt{(\text{tr}H)^2 - nh(H)}}$$

否则假设(1)不成立, 即

$$h(H)\lambda^2 - 2(\text{tr}H)\lambda + n > 0$$

等价于

$$[|\text{tr}H|^2 - (n-1)\{\|H\|_F^2 - \max_{1 \leq k \leq n-1} (\|B\|_F - \|C\|_F)^2\}]\lambda^2 - 2(\text{tr}H)\lambda + n > 0$$

即

$$\begin{aligned} & (\text{tr}H)^2\lambda^2 - 2n(\text{tr}H)\lambda + n^2 - (n-1) \\ & [\|H\|_F^2 - \max_{1 \leq k \leq n-1} (\|B\|_F - \|C\|_F)^2]\lambda^2 + \\ & n - 2(\text{tr}H)\lambda > 0 \end{aligned} \quad (2)$$

因为

$$\text{tr}(HH^*) = \|H\|_F^2$$

所以(2)等价于

$$\begin{aligned} & [(\text{tr}H)\lambda - n]^2 - (n-1)\text{tr}[(\lambda H - I)(\lambda H - I)^*] - \\ & (n-1) \max_{1 \leq k \leq n-1} (\|B\|_F - \|C\|_F)^2 > 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{即 } [\text{tr}(\lambda H - I)]^2 - (n-1)\|\lambda H - I\|_F^2 - \\ & (n-1) \max_{1 \leq k \leq n-1} (\|B\|_F - \|C\|_F)^2 > 0 \end{aligned}$$

于是

$$h(\lambda H - I) > 0$$

由定理 2 知, $\lambda H - I$ 是非奇异的, 再由 $h(H) > 0$, 可知 H 也是非奇异的, 因此 $\lambda I - H^{-1}$ 是非奇异的, 即 λ 不是 H^{-1} 的特征值, 与条件矛盾, 故(1)成立。

3 数值算例

例 3.1 设

$$H = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 & -\sqrt{2} \\ -1 & 4 & 0 & 1 \\ -1 & \sqrt{2} & 4 & 1 \\ 1 & -\sqrt{2} & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

易知 H 不是对称实方阵, 所以文献[2]中的估计不能用于此例, 又因为

$$\text{tr}H = 16, \|H\|_F^2 = 87$$

$$\max_{1 \leq k \leq n-1} (\|B\|_F - \|C\|_F)^2 = 3$$

所以 $h(H) = 256 - 3 \times 84 = 4 > 0$

于是可知满足定理 3 的条件, 所以由定理 3, 我们有 H 的实特征值满足

$$\frac{4}{16 + \sqrt{256 - 4 \times 4}} \leq \lambda(H) \leq$$

$$\frac{4}{16 - \sqrt{256 - 4 \times 4}}$$

即 $0.1270 \leq \lambda(H) \leq 7.8730$

计算得 H 的实特征值为 3.663 4 和 4.000 0, 可见我们的估计是有效的。

参考文献:

- [1] 王松桂, 吴密霞, 贾忠贞. 矩阵不等式[M]. 北京: 科学出版社, 2005.
- [2] 黄廷祝, 杨传胜. 特殊矩阵分析及应用[M]. 北京: 科学出版社, 2007.

Estimation for Real Eigenvalues of Matrices

CHEN Xiang-yun

(Department of Foundamental Science Teaching, Yancheng Institute of Technology, Jiangsu Yancheng 224051, China)

Abstract: A new estimation for real eigenvalues of matrices is obtained. The conclusions are given in the form of theorems and have been tested. And the effectiveness of results is verified by using numerical example.

Keywords: eigenvalues; estimation; example

(责任编辑: 张英健; 校对: 沈建新)