p－超可解群的一些充分条件

张雪梅,季红蕾,卞小霞
(盐城工学院 基础教学部,江苏 盐城 224051)

摘要:设 X 是群 G 的非空子集,$A\leqslant G,B\leqslant G$,若 $\exists x\in X$ 使得 $AB^x=B^xA$,则称 A 和 B 在 G 中 X－可换;若 $\forall P\in \mathrm{Syl}p(G)$,$\exists x\in X$,使得 $AP^x=P^xA$,则称 A 在 G 中 $X-s-$可换。利用有限群 G 的子群的 X－可换及 $X-s-$可换性刻画群 G 的结构,得到群 G 为 p－超可解群的一些充分条件。

关键词:有限群;X－可换;$X-s-$可换;p－超可解
中图分类号:O152.1　　**文献标识码**:A　　**文章编号**:1671－5322(2010)03－0021－03

借助置换子群研究群的构造是群论研究者感兴趣的课题之一。1939年,O. Ore[1]证明了有限群的每个置换子群都是次正规的。1962年,Ito[2]证明了对有限群 G 的每个置换子群 H,H/H_G 是幂零群。近年来,这方面的研究又有了新的成果。郭文彬等[3]、石磊等[4]分别在2006年和2008年提出了 X－可换子群与 $X-s-$可换子群的概念,并获得了一系列结果,其他的相关成果见文献[5,6]。本文将进一步利用子群的 X－可换及 $X-s-$可换性得到有限群为 p－超可解群的一些充分条件。

本文所有群皆为有限群,"$P\in \mathrm{Syl}p(G)$"表示 P 是 G 的 Sylow$p$－子群;"$A\lhd G$"表示 A 是 G 的正规子群;"$M<\cdot G$"表示 M 是 G 的极大子群;"$\forall$"表示任意;"$\exists$"表示存在。未交待的符号和术语可参见文献[7,8]。

1　预备知识

定义1　设 X 是群 G 的非空子集,$A\leqslant G,B\leqslant G$。若 $\exists x\in X$ 使得 $AB^x=B^xA$,则称 A 和 B 在 G 中 X－可换。

定义2　设 X 是群 G 的非空子集,$H\leqslant G$。若 $\forall T\in \mathrm{Syl}p(G)$,$\exists x\in X$,使得 $HT^x=T^xH$,则称 H 在 G 中 $X-s-$可换。

定义3　一个群 G 称为 p－可解的,如果它的每个非交换主因子 H/K 是 p'－群。

定义4　群 G 称为 p－超可解的,如果它的每个非 p－阶的主因子是 p'群。

定义5　群 G 关于子群 H 的不同右陪集的个数称为子群 H 在群 G 中的指数,记为 $|G:H|$。

引理1[9]　设 G 是群,$K\lhd G,A,B,X\leqslant G$,那么下列结论成立:

(1)如果 A 和 B 在 G 中 X－可换,那么 B 和 A 在 G 中也 X－可换;

(2)如果 A 和 B 在 G 中 X－可换,那么 AK/K 和 BK/K 在 G/K 中 XK/K－可换;

(3)如果 $K\leqslant A$,那么 A/K 和 BK/K 在 G/K 中 XK/K－可换当且仅当 A 和 B 在 G 中 X－可换;

(4)如果 A 和 B 在 G 中 X－可换且 $X\leqslant M\leqslant G$,那么 A 和 B 在 G 中 M－可换;

(5)如果 A 和 B 在 G 中 X－可换且 $X\leqslant N_G(X)$,那么 A 和 B 可换。

引理2[10]　若 G 是 p－可解的外 p－超可解群,则

(1)$G=AN$,其中 A 为 p－超可解极大子群,N 为 G 的极小正规子群,N 初等交换,且 $|N|=p^\alpha$,$\alpha>1$;$A\cap N=1$,$C_G(N)=N=F(G)$。

(2)$O_p(A)=1$,当 A 为幂零群时,$N\in \mathrm{syl}p(G)$。

(3)以下4者等价:ⅰ)G 为 p－幂零群;ⅱ)G'为幂零群;ⅲ)A 为交换群;ⅳ)A 为循环群。

引理3[11]　若 G 有两子群 M、K,使得 $G=MK$。则对任意 $x,y\in G$,$G=M^xK^y$。

引理4[4]　G 是群,$\phi\neq X\subseteq G,K\lhd G,H\leqslant G$,

收稿日期:2010－04－24
作者简介:张雪梅(1978－),女,江苏徐州市人,讲师,硕士,主要研究方向为有限群。

则

(1)若H在G中$X-s-$可换,那么HK/K在G/K中$XK/K-s-$可换;

(2)若HK/K在G/K中$XK/K-s-$可换且$K\subseteq H$,那么H在G中$X-s-$可换;

(3)设$K\subseteq X$,HK/K在G/K中$X/K-s-$可换且$(|H|,|K|)=1$。若G可解或G幂零,则H在G中$X-s-$可换;

(4)若H在G中$X-s-$可换,则$H\cap K$在G中$X-s-$可换。

引理5[8]　设G为有限群,$N\lhd G$,$H\leqslant G$,若$N\subseteq\Phi(H)$,则$N\subseteq\Phi(G)$。

2　主要结果

定理1　设G为$p-$可解群,$X\leqslant G$,且X包含G的极小子群和极大子群。如果G的每个指数为p的幂的极大子群和G的Sylow$p-$子群的极大子群在G中$X-$可换,则G为$p-$超可解群。

证明:令G是使命题不真的极小阶反例。

设$1\neq L\cdot\lhd G$,$M/L<\cdot G/L$,$|G/L:M/L|=p^{\alpha}$,则$M<\cdot G$,且$|G:M|=p^{\alpha}$。令$PL/L\in \mathrm{Syl}p(G/L)$,$P_1/L<\cdot P/L$,其中$P\in \mathrm{Syl}p(G)$,则$\exists P_2<\cdot P$,使得$P_2L/L=P/L$。由条件$M$和$P_2$在$G$中$X-$可换,由引理1知$M/L$和$P_1/L$在$G/L$中$XL/L-$可换,即条件是商群闭的。

因为G是$p-$可解外$p-$超可解群,由引理2知,$G=AN$,$|N|=p^{\alpha}$,$\alpha>1$,$A\cap N=1$其中$N\cdot\lhd G$,N初等交换,A为$p-$超可解极大子群,从而A为G的指数为p的幂的极大子群。

若$N\in \mathrm{Syl}p(G)$,$N_1<\cdot N$。由条件,A和N_1在G中$X-$可换,即$\exists x\in X\subseteq G$,使得$D=AN_1^x=N_1^xA$。若$D=G$,则由引理3,$G=AN_1$,$|G:A|=|N_1|=|N|$,与$N_1<\cdot N$矛盾。因此$D\neq G$。又$A<\cdot G$,$AN_1^x=A$,$N_1^x\subseteq A\cap N=1$,故$|N_1^x|=|N_1|=1$,$|N|=p$,与$\alpha>1$矛盾。因此$N\notin \mathrm{Syl}p(G)$。

令$A_p\in \mathrm{Syl}p(A)$,于是$P=NA_p\in \mathrm{Syl}p(G)$,则$\exists P_0<\cdot P$,使得$A_p\subseteq P_0$。由条件,$\exists y\in X\subseteq G$,使得$D=A^yP_0=P_0A^y$。又$G=AN$,有$y=an$,其中$a\in A$,$n\in N$,因此$D=P_0A^n$。又$P_0\lhd P$,故$A_p^n\subseteq P_0^n=P_0$。若$D=G$,则$P=P\cap P_0A^n=P_0(P\cap A^n)=P_0A_p^n=P_0$,与$P_0<\cdot P$矛盾,故$D\neq G$。又$A^n<\cdot G$,所以$P_0A^n=A^n$,$P_0\subseteq A^n$,从而$|G:A^n|=|G:A|=p=|N|$,与$\alpha>1$矛盾。

因此G为$p-$超可解群。

定理2　设G为$p-$可解群,$X\lhd G$,若G的每个Sylow$p-$子群的极大子群在G中$X-s-$可换,则G为$p-$超可解群。

证明:令G是使命题不真的极小阶反例。

设$1\neq L\cdot\lhd G$,$XL/L\lhd G/L$,G/L $p-$可解,$PL/L\in \mathrm{Syl}p(G/L)$,$P_0/L<\cdot P/L$,其中$P\in \mathrm{Syl}p(G)$,则$\exists P_1<\cdot P$,使得$P_1L/L=P/L$。由条件$P_1$在$G$中$X-s-$可换,由引理4知$P_1L/L$在$G/L$中$XL/L-s-$可换,即条件是商群闭的。

因为G是$p-$可解外$p-$超可解群,由引理2知,$G=AN$,$|N|=p^{\alpha}$,$\alpha>1$,$A\cap N=1$其中$N\cdot\lhd G$,N初等交换,A为$p-$超可解极大子群。

则$\exists P\in \mathrm{Syl}p(G)$,使得$N\subseteq P$。由引理5,$N\not\subset\Phi(P)$。从而$\exists P_2<\cdot P$,使得$N\not\subset P_2$。$\forall q\in\pi(G)$,$q\neq p$,$Q\in \mathrm{Syl}q(G)$,由条件$\exists x\in X$,使得$P_2Q^x=Q^xP_2$,且$P_2\in \mathrm{Syl}p(P_2Q^x)$,$N\cap P_2=N\cap P_2Q^x\lhd P_2Q^x$。又$Q^x\subseteq N_G(N\cap P_2)$,$N\cap P_2\lhd P$,所以$N\cap P_2\lhd G$。而$N\not\subset P_2$,故$N\cap P_2=1$,$|N|=p$,与$\alpha>1$矛盾。

因此G为$p-$超可解群。

定理3　设G为$p-$可解群,$X\lhd G$,$H\lhd G$,G/H $p-$超可解,且H的每个Sylow$p-$子群的极大子群在G中$X-s-$可换,则G为$p-$超可解群。

证明:令G是使命题不真的极小阶反例。

设$1\neq L\cdot\lhd G$,$XL/L\lhd G/L$,$HL/L\lhd G/L$,$(G/L)/(HL/L)\cong G/(HL)\cong(G/H)/(LH/H)$ $p-$超可解。令$PL/L\in \mathrm{Syl}p(HL/L)$,$P_0/LN\cdot PL/L$,其中$P\in \mathrm{Syl}p(H)$,则$\exists P_1^0<\cdot P$,使得$P_1L/L=P_0/L$。由条件$P_1$在$G$中$X-s-$可换,由引理4知$P_1L/L$在$G/L$中$XL/L-s-$可换,即条件是商群闭的。

因为G是$p-$可解外$p-$超可解群,由引理2知,$G=AN$,$|N|=p^{\alpha}$,$\alpha>1$,$A\cap N=1$,其中$N\cdot\lhd G$,N初等交换,A为$p-$超可解极大子群。

则$\exists P\in \mathrm{Syl}p(G)$,使得$N\in P$。由引理5,$N\not\subset\Phi(P)$。从而$\exists P_2<\cdot P$,使得$N\not\subset P_2$。又$N\subseteq H$,$P_2\cap H$为的某个Sylow$p-$子群的极大子群,由假设,$\forall q\in\pi(G)$,$q\neq p$,$Q\in \mathrm{Syl}q(G)$,由条件$\exists x\in X$,使得$(P_2\cap H)Q^x=Q^x(P_2\cap H)$,且$P_2\cap H\in \mathrm{Syl}p((P_2\cap H)Q^x)$,$N\cap P_2=N\cap(P_2\cap H)=N\cap(P_2\cap H)Q^x\lhd(P_2\cap H)Q^x$。又$Q^x\subseteq N_G(N\cap P_2)$,$N\cap P_2\lhd P$,所以$N\cap P_2\lhd G$。而$N\not\subset P_2$,故$N\cap P_2=1$,$|N|=p$,与$\alpha>1$矛盾。

因此G为$p-$超可解群。

参考文献:

[1] Ore O. Contributions in the theory of groups of finite order[J]. Duke Math J,1939,5:431-460.

[2] Ito N,Szep J. Uber die Quasinormalteiler von endlichen Gruppen[J]. Act Sci Math,1962,23:168-170.

[3] Guo Wenbin ,Shum K P,Skiba A N. X-permutable maximal subgroup s of Sylow subgroups of finite groups[J]. Ukrain Matem J ,2006,58(10):1299.

[4] SHI Lei,GUO Wen Bin,YIXiao Lan. $X-s-$ Permutable Subgroups,Journal of Mathematical Research &Exposition[J]. 2008,28(2):257-265.

[5] Guo Wenbin,Shum K P,Skiba A N. semipermutable subgroups of finite group[J]. J Algebra,2007,315(1):31-41.

[6] Guo Wenbin,Skiba A N. On permutable subgroup s of finite groups[J]. 徐州师范大学学报:自然科学版,2009,27 (2):16.

[7] Wenbin Guo. The Theory of Classes of Groups[M]. New York:Kluwer Academic Publishers,2000.

[8] 徐明耀.有限群导引[M].北京:科学出版社,1999.

[9] 刘玉凤. X-可换子群与有限群的超可解性[J].四川理工学院学报:自然科学版,2008,21(4):1-2.

[10] 陈顺民. π-超可解群[J].西南师范大学学报:自然科学版,2002,27(6):836-840.

[11] 钱国华,朱天平.超可解群的一些充分条件[J].南京师范大学学报:自然科学版,1998,21(1):15-17.

Some Sufficient Conditions of supersolvable Group

ZHANG Xue-mei,JI Hong-lei,BIAN Xiao-xia

(Department of Fundamental Sciences Teaching, Yancheng Institute of Technology,Jiangsu Yancheng 224051,China)

Abstract: Let X be a nonempty subset of a group G. Two subgroups A and B of G are said to be X- permutable in G if there exists an element $x \in X$ such that $AB^x = B^x A$. A subgroup A of G is said to be $X-s-$ permutable in G if there exists an element $x \in X$ such that $AP^x = P^x A$. In this paper, X-permutable and $X-s-$ permutable conditions are used on some subgroups of G to characterize the structure of G, and obtain some sufficient conditions for some finite group G to be $p-$ supersolvable.

Keywords: finite group; X-permutable; $X-s-$ permutable; $p-$ supersolvable

(责任编辑:张英健; 校对:沈建新)