

转动参照系中有质空载弹簧的 应力分布和长度的影响因素分析

俞晓明

(盐城工学院 基础教学部, 江苏 盐城 224051)

摘要:考虑质量时处于转动参照系中的弹簧并非均匀伸长使得其中应力逐点变化。从理论上推导了转动参照系平面与水平面成任意角时有质空载弹簧匀速转动情况下弹簧的应力分布公式和长度公式,根据公式编程写程序分别绘制出了3种角速度下、3种倾角下弹簧应力分布图和3种倾角下弹簧长度图。在工程设计中利用该公式既可方便、快捷地选择弹簧,又可准确地确定弹簧的应力分布或预测弹簧的长度,保护弹簧。

关键词:转动参照系;有质空载弹簧;线密度;应力分布;弹簧长度

中图分类号: O313.2

文献标识码: A

文章编号: 1671-5322(2010)03-0028-04

质量分布均匀的弹簧(为叙述方便,下文简称有质弹簧)置于转动参照系中,由于惯性的作用,它不会再保持原长。文献[1,2]分别研究了水平转动参照系(转动参照系平面为水平面)中有质空载、负载弹簧的应力分布和长度影响因素,在该转动参照系中重力对弹簧的应力分布和长度没有影响。本文进一步研究有质空载弹簧处于任意转动参照系[转动参照系平面与水平面成任意角 $\theta(0 \leq \theta \leq \pi/2)$]中考虑重力影响时弹簧的应力分布和长度影响因素,并利用计算机编写程序,动态显示弹簧的应力分布和长度随几个物理量变化的关系。

设弹簧的原长为 L_0 、质量为 m 、劲度系数为 k ,弹簧初始径向线密度(以下简称线密度) $\rho_0 = \frac{m}{L_0}$ 。在静止的参照系中,将弹簧缓慢地拉伸到 L ($L > L_0$),弹簧中各处的应力均为

$$f = k(L - L_0)$$

若设此时弹簧的线密度为 $\rho = \frac{m}{L}$,则弹簧的应力为

$$f(\rho) = km \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0} \right) \quad (1)$$

应力 f 只和相对伸长有关,相对伸长与线密度 ρ

一一对应。在非均匀伸长的情况下, ρ 不是常量,是 x (弹簧上各微元到转动参照系中心的距离)的函数。研究 f 与 x 的函数关系有

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{d\rho} \frac{d\rho}{dx} = -\frac{km}{\rho^2} \frac{d\rho}{dx} \quad (2)$$

1 理论推导

图1表示近端固定于圆心、远端为自由端的弹簧在光滑导杆的作用下,在转动参照系中匀速转动,角速度为 ω ,转动参照系平面与水平面的夹角为 θ 。

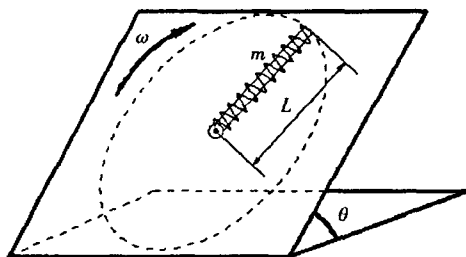


图1 转动参照系中的弹簧

Fig.1 Spring in rotating system

在转动参照系平面内建立坐标轴 Ox (见图2)。设图示时刻弹簧与轴 Ox 间的夹角为 α 。在

收稿日期:2010-05-28

作者简介:俞晓明(1977-),男,江苏如皋市人,讲师,硕士,主要研究方向为大学物理及实验教学。

离圆心 x 处取微元 Δx , 其质量 $\Delta m = \rho(x) \Delta x$, $\rho(x)$ 为 x 处弹簧的线密度。再设微元两边应力分别是 $f(x)$ 和 $f(x + \Delta x)$ 。忽略弹簧切向形变且弹簧只能够沿光滑导杆在径向方向伸缩, 考虑微元重力, 列动力学方程为

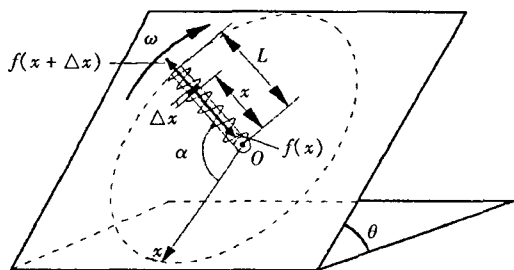


图2 弹簧微元的受力

Fig. 2 Stress of the spring element

$$f(x) - f(x + \Delta x) - \rho(x) \Delta x g \cos \alpha \sin \theta = \rho(x) \Delta x x \omega^2$$

上式变形整理得

$$\frac{df(x)}{dx} = -\rho(x) g \cos \alpha \sin \theta - \rho(x) x \omega^2 \quad (3)$$

式(3)结合式(2)整理得

$$\frac{d\rho(x)}{\rho^3(x)} = \frac{1}{km} (g \cos \alpha \sin \theta + x \omega^2) dx \quad (4)$$

(1) 考虑到弹簧的自由端没有伸长, 线密度 $\rho(L) = \rho_0$, 积分式(4), 得线密度分布函数

$$\frac{1}{\rho^2} =$$

$$\frac{1}{\rho_0^2} + \frac{1}{km} [\omega^2 (L^2 - x^2) + 2g \cos \alpha \sin \theta (L - x)] \quad (5)$$

应力分布函数

$$f = km$$

$$\left\{ \sqrt{\left(\frac{L_0}{m}\right)^2 + \frac{1}{km} [\omega^2 (L^2 - x^2) + 2g \cos \alpha \sin \theta (L - x)]} - \frac{L_0}{m} \right\} \quad (6)$$

公式(5)、(6)中的变量 θ 为转动参照系平面与水平面间的夹角, 取值范围为 $[0 - \pi/2]$; α 为弹簧与轴 Ox 间的夹角, 取值范围为 $[0 - 2\pi]$ 。

(2) 式(5)中的 L 并非独立变量, 它是 ω 、 α 、 θ 的函数。考虑到弹簧虽然被拉伸或压缩了, 但总质量没有改变, 故满足

$$\int_0^L \rho(x) dx = m \quad (7)$$

解得弹簧的“原长”

$$L = \frac{\tan \varphi}{\varphi} L_0 + \frac{g}{\omega^2} \frac{\cos \alpha \sin \theta}{\cos \varphi} - \frac{g}{\omega^2} \cos \alpha \sin \theta \quad (8)$$

其中 $\varphi = \omega \sqrt{\frac{m}{k}}$ 。

讨论: (1) 若转动参照系平面为水平面, 即 $\theta = 0$ 时, 式(5)、(8)与文献[1]中的公式(4)、(6)一致。

(2) φ 必须小于 $\frac{\pi}{2}$, 即 $\omega < \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{k}{m}}$, 否则弹簧的长度趋于无穷大, 事实上, 转动角速度尚未达到该值时, 弹簧就已经发生塑性形变了。

2 弹簧应力分布和长度的影响因素分析

编程研究弹簧应力分布和长度的影响因素。

2.1 弹簧应力分布研究

图3表示 $\theta = \pi/2$ rad、 $\alpha = \pi/2$ rad、 ω 分别取 40 rad/s、55 rad/s、60 rad/s 时, 弹簧中应力 f 随径向距离 x 的分布关系。该图说明两点:

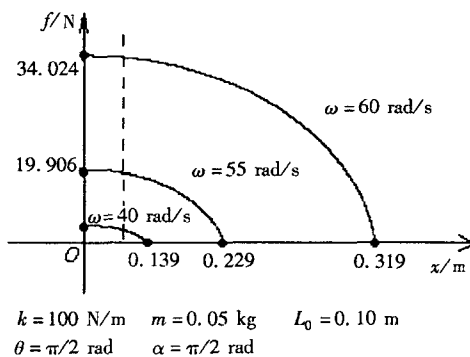


图3 3种角速度下的应力分布

Fig. 3 Stress distribution under three angular velocity

(1) 当转动参照平面在竖直平面内 ($\theta = \pi/2$ rad), 弹簧处于水平位置 ($\alpha = \pi/2$ rad) 时, 弹簧所受的重力与水平光滑导杆的约束力相抵, 此时重力对弹簧的应力分布没有影响。图3中3支曲线与文献[1]中图2所示曲线变化趋势一致。

(2) 图3中的虚线表明在离圆心相同距离 x 处, 弹簧中的应力 f 随转动角速度 ω 的增大而增大, 弹簧的形变程度越厉害。

图4表示 $\omega = 15$ rad/s, $\alpha = \pi$ rad, θ 分别为 0 rad、 $\pi/8$ rad、 $\pi/6$ rad 时, 应力 f 随径向距离 x 的变化关系, 该图表明重力对弹簧的应力分布影响很大。分析图4得出以下4点:

(1) 当 $\theta = 0$ 时, 弹簧所受的重力、光滑导杆的约束力抵消, 对弹簧的应力分布没有影响, 弹簧转动时所需向心力完全由弹簧近端的应力提供。

(2) 逐渐增大 θ 时, 弹簧转动时所需的向心力, 部分由重力提供, 部分由弹簧近端的应力提供, 近端应力 f 减小。

(3) 当 $\theta \approx \pi/8$ rad 时, 弹簧转至 $\alpha = \pi$ rad 处所需的向心力, 完全由重力提供, 弹簧近端的应力 f 减小为零。

(4) 继续增大 θ , 如 $\theta = \pi/6$ rad 时, 距离圆心 $x = 0.0359$ m 处弹簧的应力为零。处于 $0 - 0.0359$ m 的弹簧所受重力的分力大于弹簧转动所需的向心力, 弹簧近端被压缩, 应力 $f = -0.067$ N, 表明此时弹簧中的应力背离旋转中心。处于 $0.0359 - 0.0996$ m 的弹簧转动所需的向心力, 部分由重力提供, 部分由弹簧近端的应力提供, 弹簧被拉伸。应力 $f > 0$ 表明此时弹簧中的应力指向旋转中心。

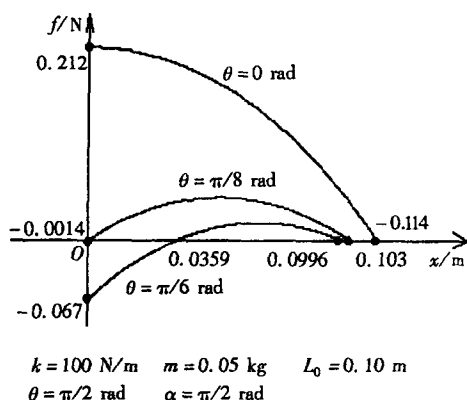


图 4 3 种倾角下的应力分布

Fig. 4 Strees distribution under three inclined angles

2.2 弹簧长度的影响因素研究

弹簧的远端为自由端, 没有发生形变, 应力 $f = 0$, 此时弹簧的长度可由曲线与 x 轴的交点坐标反映。如图 3, 3 支曲线与 x 轴的交点坐标 $x_1 = 0.139$ m、 $x_2 = 0.229$ m、 $x_3 = 0.319$ m 均大于弹簧的原长 $L_0 = 0.100$ m, 表明弹簧的转动角速度 ω 越大, 弹簧的长度 L 越长。

参考文献:

- [1] 俞晓明, 金学军, 何捷. 旋转体系中空载弹簧的应力分析[J]. 物理与工程, 2003, 13(5): 13-15, 46.
- [2] 金学军, 俞晓明. 旋转体系中负载弹簧的应力分析[J]. 物理与工程, 2004, 14(4): 18-20.

如图 5, 3 支曲线表示 $\theta = 0$ rad、 0.3 rad 和 0.4 rad 时, 弹簧长度 L 随 α ($0 \leq \alpha \leq 2\pi$ rad) 的变化关系。该图说明 3 点:

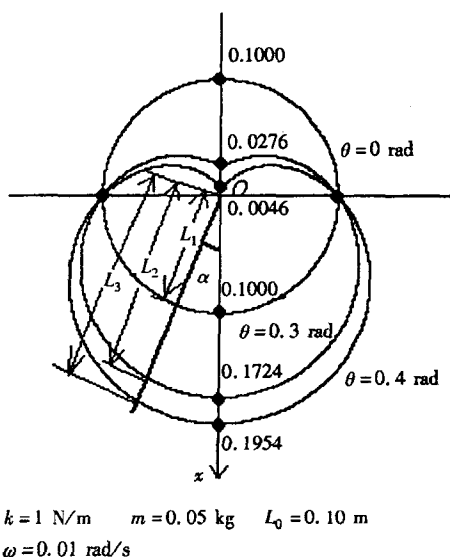


图 5 3 种倾角下的长度分布

Fig. 5 Length distribution under three inclined angles

(1) $\theta = 0$ 时, 弹簧处于水平转动参照系中, 弹簧所受的重力、光滑导杆的约束力抵消, 重力对弹簧的应力分布没有影响, 弹簧的长度不随 α 变化, 弹簧远端的轨迹是半径为 L 的圆。

(2) 当 $\theta = 0.3$ rad、 $\pi/2 \leq \alpha \leq 3\pi/2$ rad 时, 重力的分力提供弹簧转动所需 (或部分) 的向心力, 此时弹簧相对于在水平转动参照系中旋转时而言被压缩, 长度减小。图 5 中弹簧的长度由原来的 0.100 m 缩短为 0.028 m 再到 0.005 m。当 $0 \leq \alpha \leq 2\pi$ rad 或 $3\pi/2 \leq \alpha \leq 2\pi$ rad 时, 重力与弹簧转动时所需的向心力方向相反, 重力加剧了弹簧的形变, 弹簧变得越来越长。图 5 中 $\alpha = 0$ 时, $L_3 (0.095 \text{ m}) > L_2 (0.0172 \text{ m}) > L_1 (0.100 \text{ m})$ 。弹簧远端的轨迹渐变为类“心”形的图像。

(3) 当 $\alpha = \pi/2$ rad 或 $\alpha = 3\pi/2$ rad 时, 弹簧所受的重力、光滑导杆的约束力抵消, 重力对弹簧的应力分布没有影响, 故 3 支曲线相交与两点。这也许是大自然赋予机械零件的一种对称美吧。

Analysis of Stress Distribution and Length on the Mass Spring without Load in Rotating System

YU Xiao-ming

(Department of Fundamental Sciences Teaching, Yancheng Institute of Technology, Jiangsu Yancheng 224051, China)

Abstract: When considering the mass of spring in rotating system the spring will not uniformly stretches, which makes the stress distribution point – to – point changes. In this article the author theoretically deduces the formulas for stress distribution and spring length without load in uniform rotating system when the angle which is made by the plane of rotating system and horizontal plane is arbitrary. According to the formulas the author writes out the programs and respectively maps out both the stress distribution under the circumstances of three angular velocity and three inclined angels and spring length in the conditions of three inclined angels. In engineering design one can both easily and quickly selects spring and accurately determine the stress distribution or forecast the length of the spring so as to protect springs.

Keywords: rotating system; mass spring without load; linear density of mass; stress distribution; spring length

(责任编辑:张英健;校对:沈建新)

(上接第20页)

- [54] Guyon I, Elisseeff A. An instruction to variable and feature selection[J]. Journal of Machine Learning Research, 2003 (3):1 157 – 1 182.
- [55] 皋军,王士同. 基于模糊最大散度差判别准则的聚类方法[J]. 软件学报,2009,20(11):2 939 – 2 949.
- [56] 皋军,王士同,邓赵红. 基于全局和局部保持的半监督支持向量机[J]. 电子学报,2010,38(7):1 626 – 1 633.
- [57] 皋军,王士同. 基于矩阵模式的类内散度支持向量机[J]. 电子学报,2009,37(5):1 051 – 1 057.

An Introduction to Dimensionality Reduction Algorithms in Intelligent Recognition

GAO Jun

(School of Information Engineering, Yancheng Institute of Technology, Jiangsu Yancheng 224051, China)

Abstract: Dimensionality reduction algorithms, as the key technologies of data preprocessing in intelligent recognition, have been used successfully recently. On the basis of the comparison of the classical dimensionality reduction algorithms, the characteristics and advantages of each algorithm are formulated from the perspectives of feature – selection and feature – extraction separately and the corresponding problems and challenges about each of them are pointed out to certain extent.

Keywords: feature dimensionality reduction; feature selection; feature extraction; intelligent recognition

(责任编辑:沈建新;校对:张英健)