

形式三角矩阵余代数的余根滤链

尤 兰, 王 振

(盐城工学院 基础数学部, 江苏 盐城 224051)

摘要: 定义了形式三角矩阵余代数, 并讨论了这类余代数与余代数扩张的关系, 以及和形式三角矩阵代数的关系。然后讨论了余代数滤链与双余模的 Loewy 列的性质, 给出了两个余代数张量积的余根滤链和形式三角矩阵余代数的余根滤链。最后利用形式三角矩阵余代数的余根滤链给出了关于双余模的 Loewy 列的一个刻画。

关键词: 形式三角矩阵余代数; 余根滤链; 双余模; Loewy 列

中图分类号: O153.3 **文献标识码:** A **文章编号:** 1671-5322(2010)04-0013-05

设 C 为任意余代数, 定义 C 的所有单子余代数的和为 C 的余根, 记为 $\text{corad}(C)$ 。进一步令 $C_{(0)} = \text{corad}(C)$, 对 $n \geq 1$, 可归纳定义 $C_{(n)} = \Delta^{-1}(C_{(0)} \otimes C + C \otimes C_{(n-1)})$, 称 $\{C_{(n)}\}$ 为 C 的余根滤链。给定一个余代数 (Hopf 代数), 其余代数结构很大程度上取决于其余根滤链结构, 因此通过余根滤链研究余代数 (Hopf 代数) 的结构被广泛使用, 许多特殊的余代数 (Hopf 代数) 的余根滤链被给出。文献[1]的例 5.4.8 讨论了 (三角) 矩阵余代数的余根滤链, 文献[2]给出了准上三角矩阵余代数的余根滤链。形式三角矩阵环是一类非常重要的环, 被广泛研究。由于代数与余代数的对偶关系, 本文首先定义了形式三角矩阵余代数, 推广了文献[2]中准三角矩阵余代数的概念, 并说明了这是余代数扩张的一类特殊情况, 并且这类余代数的对偶就是形式三角矩阵代数。然后讨论了余代数滤链与双余模的 Loewy 列的性质, 在基本域为代数闭域条件下, 给出了两个余代数张量积的余根滤链, 推广了文献[1]中引理 5.1.10 的结论。最后给出了形式三角矩阵余代数的余根滤链, 并由此给出了关于双余模的 Loewy 列的一个刻画。设 k 为任意域, 本文所讨论的余代数、余模均为域 k 上的向量空间, 张量积符号 $\otimes_k$ 简记为 $\otimes$ 。设 (C, Δ, ϵ) 是余代数, (M, ρ_M) 是右 C -余模, (N, ρ_N) 是左 C -余模, 本文将采用 Sweedler 符号, 即记 $\Delta c = \sum c_{(1)} \otimes c_{(2)}$, $\rho_M(m) = \sum m_{(0)} \otimes$

$m_{(1)}$, $\rho_N(n) = \sum n_{(-1)} \otimes n_{(0)}$, $c \in C, m \in M, n \in N$ 。 M 与 N 的余张量积 $M \square_C N = \{x \in M \otimes N \mid (\rho_M \otimes id)(x) = (id \otimes \rho_N)(x)\}$ 。设 $M_{n \times m(k)}$ 表示由 k 上全体 $n \times m$ 矩阵构成的向量空间, 若 $n = m$, 则简记为 $M_n(k)$, 用 E_{ij} 表示 $M_{n \times n}(k)$ 中第 (i, j) 位置为 1, 其余为 0 的矩阵, aE_{ij} 表示第 (i, j) 位置为 a , 其余为 0 的矩阵。

1 形式三角矩阵余代数的定义

设 A, B 为任意环, M 为左 B -右 A -双模, 定义形式三角矩阵环为

$$T = \begin{pmatrix} A & 0 \\ M & B \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ m & b \end{pmatrix} \mid a \in A, b \in B, m \in M \right\}$$

其加法和乘法运算类似于矩阵的加法和乘法, 文献[3]称这类环为二级三角矩阵环, 并给出了 n 级三角矩阵环的定义及相关性质。这里, 若将“环”改为“代数”, 也有类似的定义。

一般地, 若 A 是一个代数, 则 A 的有限对偶 A^* 是一个余代数; 反之, 若 C 是一个余代数, 则 C 的对偶 C^* 是一个代数。由于代数与余代数的对偶关系, 下面我们定义形式三角矩阵余代数。

定义 1.1 设 C, D 为任意余代数, M 为 D - C -双余模, 令

$$T = \begin{pmatrix} C & 0 \\ M & D \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} c & 0 \\ m & d \end{pmatrix} \mid c \in C, d \in D, m \in M \right\}$$

收稿日期: 2010-10-13

作者简介: 尤兰 (1981-), 女, 江苏盐城人, 助教, 硕士, 主要研究方向为 Hopf 代数及其表示。

定义 T 上的加法为对应相同位置的元素相加, 余乘法为

$$\Delta \begin{pmatrix} c & 0 \\ m & d \end{pmatrix} = \sum \begin{pmatrix} c_{(1)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} c_{(2)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \sum \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d_{(1)} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d_{(2)} \end{pmatrix} + \sum \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ m_{(0)} & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} m_{(1)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \sum \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & m_{(-1)} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ m_{(0)} & 0 \end{pmatrix}$$

余单位为 $\varepsilon \begin{pmatrix} c & 0 \\ m & d \end{pmatrix} = \varepsilon_C(c) + \varepsilon_D(d)$ 。由余代数定义可直接验证 (T, Δ, ε) 是一个余代数, 称形如 $T = \begin{pmatrix} C & 0 \\ M & D \end{pmatrix}$ 的余代数为(二级)形式三角矩阵余代数。

$$T(n) = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ M_2 & C_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ M_3 \square_{C_2} M_2 & M_3 & C_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ M_{n-1} \square_{C_{n-2}} \cdots \square_{C_2} M_2 & M_{n-1} \square_{C_{n-2}} \cdots \square_{C_3} M_3 & \cdots & \cdots & C_{n-1} & 0 \\ M_n \square_{C_{n-1}} \cdots \square_{C_2} M_2 & M_n \square_{C_{n-1}} \cdots \square_{C_3} M_3 & \cdots & \cdots & M_n & C_n \end{bmatrix}$$

定义其加法为对应相同位置元素的相加,

$$\text{设 } x = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ m_2^{(21)} & c_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ m_3^{(31)} \otimes m_2^{(31)} & m_3^{(32)} & c_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ m_{n-1}^{(n-1,1)} \otimes \cdots \otimes m_2^{(n-1,1)} & m_{n-1}^{(n-1,2)} \otimes \cdots \otimes m_3^{(n-1,2)} & \cdots & \cdots & c_{n-1} & 0 \\ m_n^{(n1)} \otimes \cdots \otimes m_2^{(n1)} & m_n^{(n2)} \otimes \cdots \otimes m_3^{(n2)} & \cdots & \cdots & m_n^{(n,n-1)} & c_n \end{bmatrix} \in T(n),$$

定义余乘法为 $\Delta x = \sum_{i=1}^n \sum c_{i(1)} E_{ii} \otimes c_{i(2)} E_{ii} + \sum_{1 \leq j \leq i \leq n} \sum U_{ij} \otimes V_{ij}$, 其中 $U_{ij} = (m_i^{(ij)} \otimes \cdots \otimes m_j^{(ij)} \otimes m_{j+1(0)}^{(ij)}) E_{ij}$, $U_{ii} = (m_i^{(ii)} \otimes \cdots \otimes m_{i+2}^{(ii)} \otimes m_{i+1}^{(ii)}) E_{ii}$, $U_{ii} = m_i^{(ii)} (-1) E_{ii}$, $V_{ij} = m_{j+1(1)}^{(ij)} E_{ij}$, $V_{ij} = (m_{i+2}^{(ij)} \otimes \cdots \otimes m_{j+1}^{(ij)}) E_{ij}$, $V_{ij} = (m_i^{(ij)} (-1) \otimes m_{i+1}^{(ij)} \otimes \cdots \otimes m_{j+1}^{(ij)}) E_{ij}$, $j+1 \leq i \leq n-1$, 余单位为 $\varepsilon(x) = \sum_{i=1}^n \varepsilon_{C_i}(c_i)$, 则 $T(n)$ 成为余代数, 称为 n 级形式三角矩阵余代数。

另外 $T(n)$ 也可看作二级形式三角矩阵余代数。比如令 $C = C_1$, $D = T(n-1) =$

$$\begin{bmatrix} C_2 & 0 & \cdots & 0 \\ M_3 & C_3 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ M_n \square_{C_{n-1}} \cdots \square_{C_3} M_3 & M_n \square_{C_{n-1}} \cdots \square_{C_4} M_4 & \cdots & C_n \end{bmatrix},$$

若 M 为 $D-C$ -双余模, 则 M^* 为 $D^* - C^* -$ 双模, 因此可以构造形式三角矩阵代数。

定理 1.1 作为代数, 有 $T^* \cong \begin{pmatrix} C^* & 0 \\ M^* & D^* \end{pmatrix}$ 。

证明 直接验证。

余代数 T 也是文献[4]中定义的余代数的扩张的一种特殊情况。事实上, 令 $\rho_i(m) = \sum (0, m_{i-1}) \otimes m_{(0)}$, $\rho_i(m) = \sum m_{(0)} \otimes (m_{(1)}, 0)$, 则 M 是余代数 $C \oplus D$ 的一个双余模。容易验证有 $T \cong (C \oplus D) \oplus M$ 。

形式三角矩阵余代数的概念可以推广到 n 级情形。

定义 1.2 设 $C_1, C_2, \dots, C_n$ 为余代数, M_i 为 $C_i - C_{i-1} -$ 双余模, $i = 2, 3, \dots, n$ 。令

$$M = \begin{pmatrix} M_2 \\ M_3 \square_{C_2} M_2 \\ \vdots \\ M_n \square_{C_{n-1}} \cdots \square_{C_2} M_2 \end{pmatrix}, \text{ 类似于 } T(n) \text{ 中的余}$$

乘法, 定义 $\rho_i: M \rightarrow D \otimes M$,

$$\rho_i \begin{pmatrix} m_2^{(1)} \\ m_3^{(2)} \otimes m_2^{(2)} \\ \vdots \\ m_n^{(n-1)} \otimes \cdots \otimes m_2^{(n-1)} \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n-1} [(m_{i+1}^{(i)} \otimes \cdots \otimes m_3^{(i)}) E_{ii} \otimes m_2^{(i)} E_{ii} + \cdots + m_{i+1}^{(i)} E_{i,i-1} \otimes (m_i^{(i)} \otimes \cdots \otimes m_2^{(i)}) E_{i-1,1} + m_{i+1}^{(i)} (-1) E_{ii} \otimes (m_{i+1(0)}^{(i)} m_i^{(i)} \otimes \cdots \otimes m_2^{(i)}) E_{ii}], \text{ 使 } M \text{ 成为左 } D\text{-余模, 类似地, 定义 } \rho_i: M \rightarrow M \otimes C, \text{ 使 } M \text{ 成为右 } C\text{-余模。则 } M \text{ 自然地成为}$$

D - C -双余模,从而可构造余代数 $\begin{pmatrix} C & O \\ M & D \end{pmatrix}$,且有

$$T(n) \simeq \begin{pmatrix} C & O \\ M & D \end{pmatrix}.$$

下面具体构造一个 n 级形式三角矩阵余代数例子。

例 1.1 准下三角矩阵余代数。

设 $n = n_1 + \cdots + n_s$, $n_1, \cdots, n_s$ 为正整数, $C_1 = M_{n_1}(k), \cdots, C_s = M_{n_s}(k)$ 均为全矩阵余代数,构造准下三角矩阵余代数

$$\begin{bmatrix} M_{n_1}(k) & O & \cdots & O \\ M_{n_2 \times n_1}(k) & M_{n_2}(k) & \cdots & O \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ M_{n_s \times n_1}(k) & M_{n_s \times n_2}(k) & \cdots & M_{n_s}(k) \end{bmatrix}, \text{它是由全}$$

矩阵余代数 $M_{n_i}(k)$ 模去余理想

$$\begin{bmatrix} O & M_{n_1 \times n_2}(k) & \cdots & M_{n_1 \times n_s}(k) \\ O & O & \cdots & M_{n_2 \times n_s}(k) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ O & O & \cdots & O \end{bmatrix} \text{得到的商余代}$$

数。另一方面,令 $M_{n_i \times n_{i-1}}(k)$ 为 $C_i - C_{i-1}$ -双余

模,余模作用由 $\rho_i(E_{pq}) = \sum_{r=1}^{n_i} E_{pr} \otimes E_{rq}, \rho_r(E_{pq}) =$

$\sum_{r=1}^{n_{i-1}} E_{pr} \otimes E_{rq}$ 给出, $i = 2, 3, \cdots, s$ 。构造 n 级形式三角矩阵余代数 $T(n)$,容易验证作为 $C_i - C_{j-1}$ -双余模有 $M_{n_i \times n_{i-1}}(k) \square_{C_{i-1}} M_{n_{i-1} \times n_{i-2}}(k) \square_{C_{i-2}} \cdots \square_{C_j} M_{n_j \times n_{j-1}}(k) \simeq M_{n_i \times n_{j-1}}(k)$,从而有

$$T(n) \simeq \begin{bmatrix} M_{n_1}(k) & O & \cdots & O \\ M_{n_2 \times n_1}(k) & M_{n_2}(k) & \cdots & O \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ M_{n_s \times n_1}(k) & M_{n_s \times n_2}(k) & \cdots & M_{n_s}(k) \end{bmatrix}$$

2 形式三角矩阵余代数的余根滤链

本节我们主要讨论余代数滤链与双余模的 Loewy 列的性质,给出了两个余代数张量积的余根滤链和 $T = \begin{pmatrix} C & O \\ M & D \end{pmatrix}$ 的余根滤链,最后利用 T 的余根滤链给出了关于双余模的 Loewy 列的一个刻画。

设 C 为余代数,若 $\{A_{(n)}\}$ 是 C 的一族子空间且满足 $A_{(n)} \subseteq A_{(n+1)}, C = \bigcup_{n \geq 0} A_{(n)}, \Delta A_{(n)} \subseteq \sum_{i=0}^n A_{(i)} \otimes A_{(n-i)}$,则称 $\{A_{(n)}\}$ 是 C 的一个余代数滤链。

引理 2.1 设 C 为余代数, $\{A_{(n)}\}$ 是 C 的一个余代数滤链,则 $A_{(0)} \supseteq C_{(0)}$ 。若 $A_{(0)} = C_{(0)}$,则有 $A_{(n)} \subseteq C_{(n)}, n \geq 0$ 。

证明 第一部分结论参见文献[7,引理 5.3.4]。下证第二部分,假设已有 $A_{(i)} \subseteq C_{(i)}, 0 \leq i \leq n-1$,要证 $A_{(n)} \subseteq C_{(n)}$ 。因为 $C_{(n)} = \Delta^{-1}(C_{(0)} \otimes C + C \otimes C_{(n-1)})$,而 $\Delta A_{(n)} \subseteq \sum_{i=0}^n A_{(i)} \otimes A_{(n-i)} \subseteq C_{(0)} \otimes C + C \otimes C_{(n-1)}$,所以 $A_{(n)} \subseteq C_{(n)}$ 。证毕。

下面恒设基础域 k 为代数闭域。

引理 2.2 设 C, D 为余代数,令 $U_{(n)} = \sum_{i=0}^n C_{(i)} \otimes D_{(n-i)}, n \geq 0$,则 $\{U_{(n)}\}$ 是一个余代数滤链。

证明 由余代数滤链定义直接验证。

定理 2.1 设 C, D 为任意余代数,则 $(C \otimes D)_{(n)} = \sum_{i=0}^n C_{(i)} \otimes D_{(n-i)}, n \geq 0$ 。

证明 令 $U_{(n)} = \sum_{i=0}^n C_{(i)} \otimes D_{(n-i)}, n \geq 0$,先证明 $(C \otimes D)_{(0)} = U_{(0)} = C_{(0)} \otimes D_{(0)}$ 。由引理 2.2 知 $\{U_{(n)}\}$ 是一个余代数滤链,由引理 2.1 知 $(C \otimes D)_{(0)} \subseteq C_{(0)} \otimes D_{(0)}$ 。另一方面,因为 $C_{(0)}, D_{(0)}$ 是单子余代数的直和,可设 $C_{(0)} = \bigoplus_{\alpha} W_{\alpha}, D_{(0)} = \bigoplus_{\beta} V_{\beta}$,其中 W_{α}, V_{β} 均是(有限维)单子余代数。考虑对偶代数 $(W_{\alpha} \otimes V_{\beta})^* \simeq W_{\alpha}^* \otimes V_{\beta}^*$ 。因为 $W_{\alpha}^*, V_{\beta}^*$ 均是代数闭域 k 上的单代数,所以均是中心单代数,由文献[5]推论 3.6 知 $(W_{\alpha} \otimes V_{\beta})^*$ 也是中心单代数,从而 $W_{\alpha} \otimes V_{\beta}$ 是单余代数。所以 $C_{(0)} \otimes D_{(0)} = \bigoplus_{\alpha, \beta} W_{\alpha} \otimes V_{\beta}$ 是半单余代数,因此 $C_{(0)} \otimes D_{(0)} \subseteq (C \otimes D)_{(0)}$ 。这就证明了 $(C \otimes D)_{(0)} = U_{(0)} = C_{(0)} \otimes D_{(0)}$ 。下面用归纳法证明 $U_{(n)} = (C \otimes D)_{(n)}, n \geq 1$ 。假设已经证明 $U_{(i)} = (C \otimes D)_{(i)}, 0 \leq i \leq n-1$,要证 $U_{(n)} = (C \otimes D)_{(n)}$ 。一方面,由于 $\{U_{(n)}\}$ 是一个余代数滤链且 $U_{(0)} = (C \otimes D)_{(0)}$,由引理 2.1 知 $U_{(n)} \subseteq (C \otimes D)_{(n)}$ 。另一方面,若 $\sum c_i \otimes d_i \in (C \otimes D)_{(n)}$,则 $\sum c_{i(1)} \otimes d_{i(1)} \otimes c_{i(2)} \otimes d_{i(2)} \in (C \otimes D)_{(0)} \otimes (C \otimes D) + (C \otimes D) \otimes (C \otimes D)_{(n-1)} = \sum_{j=0}^{n-1} [C_{(0)} \otimes D_{(0)} \otimes C \otimes D + C \otimes D \otimes C_{(j)} \otimes D_{(n-j-1)}]$,考虑两端在 $id \otimes \varepsilon \otimes id \otimes id$ 下的象,即 $\sum c_{i(1)} \otimes c_{i(2)} \otimes d_i \in \sum_{j=0}^{n-1} [C_{(0)} \otimes C \otimes D + C \otimes C_{(j)} \otimes D_{(n-j-1)}]$ 。若 $d_i \in D_{(0)}$,则 $\sum c_{i(1)} \otimes c_{i(2)} \in \sum_{j=0}^{n-1} [C_{(0)} \otimes C + C \otimes C_{(j)}]$,即 $c_i \in C_{(n)}$;若 $d_i \in D_{(1)} \setminus D_{(0)}$,则 $\sum c_{i(1)} \otimes c_{i(2)} \in \sum_{j=0}^{n-2} [C_{(0)} \otimes C + C \otimes C_{(j)}]$,即 $c_i \in C_{(n-1)}$ 。一

般地,若 $d_i \in D_{(n-j-1)} \setminus D_{(n-j-2)}$, 则 $c_i \in C_{(j+1)}$, 从而 $\sum c_i \otimes d_i \in \sum_{j=0}^n C_{(j)} \otimes D_{(n-j)} = U_{(n)}$, 所以 $(C \otimes D)_{(n)} \subseteq U_{(n)}$ 。这就证明了 $U_{(n)} = (C \otimes D)_{(n)}$ 。证毕。

引理 2.3 设 C 为任意余代数, $\{A_{(n)}\}$ 是 C 的一个余代数滤链, 则 $\{A_{(n)}\}$ 也是 C 的反余代数 C^{cop} 的一个余代数滤链。特别的, C 和 C^{cop} 有相同的余根滤链, 即 $C_{(n)} = (C^{cop})_{(n)}, n \geq 0$ 。

引理 2.4 设 C, D 为余代数, M 是 k -向量空间, 则 M 是 $C-D$ -双余模当且仅当 M 是右 $C^{cop} \otimes D$ -余模当且仅当 M 是左 $C \otimes D^{cop}$ -余模。

证明 若 M 的左 C -余模作用为 ρ_C , 右 D -余模作用为 ρ_D , 则可定义 M 的右 $C^{cop} \otimes D$ -余模作用为 $\rho_{C^{cop} \otimes D} = (\tau \otimes id)(\rho_C \otimes id)\rho_D$ 。反之, 若 M 的右 $C^{cop} \otimes D$ -余模作用为 $\rho_{C^{cop} \otimes D}$, 则可定义 M 的左 C -余模作用为 $\rho_C = \tau(id \otimes id \otimes \varepsilon_D)\rho_{C^{cop} \otimes D}$, 右 D -余模作用为 $\rho_D = (id \otimes id \otimes \varepsilon_C)\rho_{C^{cop} \otimes D}$, 使 M 成为 $C-D$ -双余模。类似可证明左 $C \otimes D^{cop}$ -余模的情形。证毕。

对余模 M , 可以定义 M 的 Loewy 列如下: 设 M 是任意左 C -余模, 余模作用为 $\rho_M: M \rightarrow C \otimes M$, 定义 $soc^{n+1}(M) = \rho_M^{-1}(C_{(n)} \otimes M)$ 。记 $M_{(n)} = soc^{n+1}(M)$, 可归纳证明 $M_{(n)} = \rho_M^{-1}(C_{(0)} \otimes M + C \otimes M_{(n-1)})$, 且可验证 $\rho(M_{(n)}) \subseteq \sum_{i=0}^n C_{(i)} \otimes M_{(n-i)}, n \geq 0$ 。若 M 是右 C -余模, 可类似进行定义。若 M 是 $C-D$ -双余模, 则由引理 2.5 可将 M 看作左 $C \otimes D^{cop}$ -余模或右 $C^{cop} \otimes D$ -余模来定义, 由引理 2.4 知这两种定义是一致的。滤链 $0 \subseteq soc(M) \subseteq \dots \subseteq soc^n(M) \subseteq \dots$ 称为左 C -余模(右 C -余模, $C-D$ -双余模) M 的 Loewy 列。

定理 2.2 $T_{(n)} = \begin{pmatrix} C_{(n)} \\ M_{(n-1)} & D_{(n)} \end{pmatrix}, n \geq 0$, 其中 $M_{(-1)} = 0, \{M_{(n-1)}: n \geq 1\}$ 是 $C-D$ -双余模 M 的 Loewy 列。

证明 令 $V_{(n)} = \begin{pmatrix} C_{(n)} \\ M_{(n-1)} & D_{(n)} \end{pmatrix}, n \geq 0$ 。首先验证 $\{V_{(n)}\}$ 是一个余代数滤链。任取 $\begin{pmatrix} c & 0 \\ m & d \end{pmatrix} \in V_{(n)}$, 则 $\sum c_{(1)} \otimes c_{(2)} \in \sum_{i=0}^n C_{(i)} \otimes C_{(n-i)}, \sum d_{(1)} \otimes d_{(2)} \in \sum_{i=0}^n D_{(i)} \otimes D_{(n-i)}$, 由定理 2.3 和引理 2.4 知 $\Delta(m) = \sum m_{(0)} \otimes m_{(-1)} \otimes m_{(1)} \in \sum_{i=0}^n M_{(i-1)} \otimes (D^{cop} \otimes C)_{(n-i)} = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{n-i} M_{(i-1)} \otimes D_{(j)} \otimes C_{(n-i-j)}$ 。用 $\tau(id$

$\otimes id \otimes \varepsilon_C$ 作用在 $\Delta(m)$ 上, 容易验证有 $\sum m_{(-1)} \otimes m_{(0)} \in \sum_{j=0}^{n-1} D_{(j)} \otimes M_{(n-j-1)}$, 用 $id \otimes \varepsilon_D \otimes id$ 作用在 $\Delta(m)$ 上, 易证有 $\sum m_{(0)} \otimes m_{(1)} \in \sum_{i=0}^n M_{(i-1)} \otimes C_{(n-i)}$ 。因此知等式

$$\Delta \begin{pmatrix} c & 0 \\ m & d \end{pmatrix} = \sum \begin{pmatrix} c_{(1)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} c_{(2)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \sum \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d_{(1)} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d_{(2)} \end{pmatrix} + \sum \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ m_{(0)} & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} m_{(1)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \sum \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & m_{(-1)} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ m_{(0)} & 0 \end{pmatrix} \quad (*)$$

的右端中每一被加项均在 $\sum_{i=0}^n \begin{pmatrix} C_{(i)} \\ M_{(i-1)} & D_{(i)} \end{pmatrix} \otimes$

$\begin{pmatrix} C_{(n-i)} \\ M_{(n-i-1)} & D_{(n-i)} \end{pmatrix}$ 中, 从而 $\{V_{(n)}\}$ 是一个余代数

滤链。再证 $T_{(n)} = V_{(n)} = \begin{pmatrix} C_{(n)} \\ M_{(n-1)} & D_{(n)} \end{pmatrix}, n \geq 0$ 。

由引理 2.1 知此时有 $T_{(0)} \subseteq \begin{pmatrix} C_{(0)} \\ D_{(0)} \end{pmatrix}$, 又因

$C_{(0)}, D_{(0)}$ 余半单, 所以 $\begin{pmatrix} C_{(0)} \\ D_{(0)} \end{pmatrix}$ 余半单, 从而

$T_{(0)} = \begin{pmatrix} C_{(0)} \\ D_{(0)} \end{pmatrix} = V_{(0)}$ 。下面用归纳法证明

$T_{(n)} = V_{(n)}, n \geq 1$ 。假设对 $0 \leq i \leq n-1$ 已经证明 $T_{(i)} = V_{(i)}$, 要证 $T_{(n)} = V_{(n)}$ 。一方面, 由于 $\{V_{(n)}\}$ 是一个余代数滤链且 $V_{(0)} = T_{(0)}$, 由引理 2.1 知

$V_{(n)} \subseteq T_{(n)}$ 。另一方面, 若 $\begin{pmatrix} c & 0 \\ m & d \end{pmatrix} \in T_{(n)}$, 则有

$$\Delta \begin{pmatrix} c & 0 \\ m & d \end{pmatrix} \in T_{(0)} \otimes T + T \otimes T_{(n-1)} = \begin{pmatrix} C_{(0)} \\ D_{(0)} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} C \\ M & D \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C \\ M & D \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} C_{(n-1)} \\ M_{(n-2)} & D_{(n-1)} \end{pmatrix}$$

若记 $\Delta \begin{pmatrix} c & 0 \\ m & d \end{pmatrix}$ 的展开式 $(*)$ 式中右端四个连加和分别为 I_1, I_2, I_3, I_4 , 则 I_1, I_2, I_3, I_4 线性无关, 因此均在 $\begin{pmatrix} C_{(0)} \\ D_{(0)} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} C \\ M & D \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C \\ M & D \end{pmatrix} \otimes$

$\begin{pmatrix} C_{(n-1)} \\ M_{(n-2)} & D_{(n-1)} \end{pmatrix}$ 中, 从而有 $\sum c_{(1)} \otimes c_{(2)} \in C_{(0)} \otimes C + C \otimes C_{(n-1)}$, $\sum d_{(1)} \otimes d_{(2)} \in D_{(0)} \otimes D + D \otimes D_{(n-1)}$, 因此有 $T_{(n)} = \begin{pmatrix} C_{(n)} \\ M' & D_{(n)} \end{pmatrix}$, 其中 $M' \subseteq M$. 任取 $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ m & 0 \end{pmatrix} \subseteq T_{(n)}$, 则 $\Delta \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ m & 0 \end{pmatrix} \in \sum_{i=0}^n T_{(i)} \otimes T_{(n-i)}$, 由于 $T_{(i)} = \begin{pmatrix} C_{(i)} \\ M_{(i-1)} & D_{(i)} \end{pmatrix}, i=0, 1, \dots, n-1, T_{(n)} = \begin{pmatrix} C_{(n)} \\ M' & D_{(n)} \end{pmatrix}$, 得出

$$\begin{aligned} \sum m_0 \otimes m_1 &\in M_{(0)} \otimes C_{(n-1)} + M_{(1)} \otimes C_{(n-2)} + \dots + M_{(n-2)} \otimes C_{(1)} + M' \otimes C_{(0)} \\ \sum m_{-1} \otimes m_0 &\in D_{(0)} \otimes M' + D_{(1)} \otimes M_{(n-2)} + \dots + D_{(n-2)} \otimes M_{(1)} + D_{(n-1)} \otimes M_{(0)} \end{aligned}$$

由归纳假设可知

$$\begin{aligned} \sum m_{-1} \otimes m_0 \otimes m_1 &\in (D_{(0)} \otimes M_{(0)}) \otimes C_{(n-1)} + (D_{(0)} \otimes M_{(1)} + D_{(1)} \otimes M_{(0)}) \otimes C_{(n-2)} + \dots + \\ &(\sum_{i=0}^{n-2} D_{(i)} \otimes M_{(n-i-2)}) \otimes C_{(1)} + D_{(n-1)} \otimes M' \otimes C_{(0)} \end{aligned}$$

参考文献:

- [1] Montgomery S. Hopf algebras and their actions on rings[M]. CBMS Lectures: Providence, RI, 1993.
- [2] 吴美云, 李彤彤. 一类余代数的余根滤链[J]. 扬州大学学报: 自然科学版, 2006, 9(3): 5-7.
- [3] 史美华, 李方. n 级三角矩阵环上的模范畴和同调特征[J]. 数学学报, 2006, 49(1): 215-224.
- [4] 朱虹, 唐海军. 余代数的平凡扩张[J]. 扬州大学学报: 自然科学版, 2008, 11(3): 1-5.
- [5] 德洛兹德 IOA, 基里钦科 B B. 有限维代数[M]. 刘绍学, 张英伯, 译. 北京: 北京师范大学出版社, 1983.
- [6] M Auslander, I Reiten, S Smalø. Representation Theory of Artin Algebras[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1995.

The Coradical Filtrations of the Formal Triangular Matrix Coalgebras

YOU Lan, WANG Zhen

(Department of Fundamental Sciences, Yancheng Institute of Technology, Jiangsu Yancheng 224051, China)

Abstract: Firstly, we introduce the concept of the formal triangular matrix coalgebras, discuss their connections with extensions of coalgebras and with the formal triangular matrix algebras. Then we discuss some properties of the coalgebra filtrations and the Loewy series, determine the coradical filtrations of the tensor product of two coalgebras and the formal triangular matrix coalgebras. Lastly, the Loewy series of bicomodules are described through the coradical filtrations of the formal triangular matrix coalgebras.

Keywords: formal triangular matrix coalgebra; coradical filtration; bicomodule; Loewy series

(责任编辑: 张英健; 校对: 沈建新)

同时也 $\in D_{(0)} \otimes (M \otimes C) + D_{(1)} \otimes (\sum_{i=0}^{n-2} M_{(n-i-2)} \otimes C_{(i)}) + \dots + D_{(n-2)} \otimes (M_{(1)} \otimes C_{(0)} + M_{(0)} \otimes C_{(1)}) + D_{(n-1)} \otimes (M_{(0)} \otimes C_{(0)})$, 因此在它们的交集中, 又因为交集包含于 $\sum_{j=0}^{n-1} D_{(j)} \otimes M \otimes C_{(n-j-1)}$, 所以有 $\sum m_0 \otimes m_{-1} \otimes m_1 \in \sum_{j=0}^{n-1} M \otimes D_{(j)} \otimes C_{(n-j-1)} = M \otimes (D \otimes C)_{(n-1)}$, 即 $m \in M_{(n-1)}$. 这就证明了 $T_{(n)} = \begin{pmatrix} C_{(n)} \\ M_{(n-1)} & D_{(n)} \end{pmatrix}$. 证毕.

下面我们考虑 T 的对偶代数. 由定理 1.2 不妨设 $T^* = \begin{pmatrix} C^* & 0 \\ M^* & D^* \end{pmatrix}$, 则 T^* 的 Jacobson 根 $\text{Jac}(T^*) = \begin{pmatrix} \text{Jac}(C^*) & 0 \\ M^* & \text{Jac}(D^*) \end{pmatrix}^{[6]}$. 设 V 是线性空间, $W \subseteq V$ 为子空间, 定义 $W^\perp = \{f \in V^* \mid f(W) = 0\}$. 设 $J = \text{Jac}(T^*)$, 由文献[1] 命题 5.2.9 知 $J = T_{(0)}^\perp, T_{(n)} = (J^{n+1})^\perp, n \geq 0$. 因此有:

定理 2.3 设 $\{M_{(n)}, n \geq 0\}$ 是 $D-C$ -双余模 M 的 Loewy 列, 则有

$$M_{(n)} = \left[\sum_{i=0}^n \text{Jac}^i(D^*) M^* \text{Jac}^{n-i}(C^*) \right]^\perp, n \geq 0$$