

弹簧质量对振子运动的影响

钱 红

(江阴职业技术学院 院长室, 江苏 江阴 214405)

摘要:弹簧振子是物理学中的一个典型模型,在实验中得到的弹簧振子的振动频率和理论结果存在着较大的差异,其中有很多原因,但主要是由于弹簧的质量对振动有一定的影响。通过四阶龙格—库塔法,求解含质量的弹簧振子运动方程的解,由计算结果分析弹簧质量对系统振动频率的影响。

关键词:弹簧振子;四阶龙格—库塔法;弹簧质量

中图分类号:0313 **文献标识码:**A **文章编号:**1671-5322(2010)04-0024-03

弹簧振子是大学物理中的一个典型模型,对于弹簧质量不可忽略的弹簧振子已有许多文献从不同的角度加以研究^[1-5]。文献[1]给出了系统的能量表达式,然后令能量的一阶导数等于零,得到运动方程,再由运动方程求得圆频率;文献[2]从有质量弹簧的波动方程出发,运用牛顿第二定律和胡克定律及微元分析法,给出定解问题,然后通过分离变量法,直接求解波动方程,得到分离变量形式的解和频率所满足的本征值方程,并采用迭代法解出弹簧振子的本征频率,导出弹簧的有效质量的渐进级数表达式,最后由初始条件解出其对应的振幅,得到弹簧质量不可忽略的弹簧振子系统的振动解。

本文将通过四阶龙格—库塔法来求解弹簧质量不可忽略的弹簧振子运动方程的解,进而分析弹簧质量对振子运动的影响。

1 弹簧振子系统的微分方程

弹簧谐振子系统如图1所示,弹簧的弹性系数为 k ,质量为 m ,一端固定,另一端系一质量为



图1 弹簧振子系统

Fig. 1 Spring vibrator

m_0 的物体,物体与桌面间无摩擦。

考虑弹簧的质量,则除了 m_0 外,系统内还有均匀分布在弹簧上的无穷多小质点的直线振动,这是一个无穷多自由度的振动系统。若能求解这个系统的本征值问题,就可以得到振动系统的圆频率,这是求一维弹性波波动方程在适当的边界条件下的本征值问题。我们可以不去求解波动方程,而是把连续的系统离散化后求解多自由度的振动方程。

将原系统的弹簧看成等长的 n 截弹簧串联而成,其中每截弹簧质量为 $\Delta m = m/n$,弹性系数为 nk 。再让每截弹簧的质量集中在该节的一端。这样就将原系统离散化成如图2所示的系统。

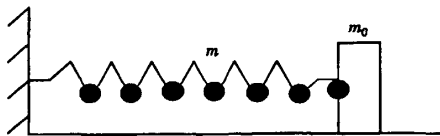


图2 离散化的弹簧振子系统

Fig. 2 Discretized spring vibrator

这一系统是由 n 个弹簧振子串联而成,每个振子的弹性系数都为 nk ,除最右边的振子质量为 $\Delta m + m_0$ 外,其它振子的质量都是 Δm ,这是一个 n 自由度的振动系统。当 n 趋于无穷大时,这一系统和原系统相同。

对弹簧振子整个系统来说: $F_{\text{合}} = -kx = ma$

收稿日期:2010-11-02

作者简介:钱红(1965-),男,江苏江阴人,高级教师,主要研究方向为应用物理、高等教育管理。

对第1个振子,它只受到第2个振子对它的力:

$$F_{\text{合}1} = -nk[(x_2 - x_1) - x_1] = \Delta m a$$

$$\text{整理得 } 2nkx_1 - nkx_2 = \Delta m \ddot{x}_1 \quad (1)$$

对第2个,第3个……第 $n-1$ 个振子,它们同时受到左边、右边两个力的作用:

$$F_{\text{合}i} = -nk[(x_{i+1} - x_i) - (x_i - x_{i-1})] = \Delta m a$$

$$\text{整理得 } 2nkx_i - nkx_{i+1} - nkx_{i-1} = \Delta m \ddot{x}_i \quad (2)$$

对第 n 个振子,它只受到第 $n-1$ 个振子对它的力:

$$F_{\text{合}n} = -nk[0 - x_n - x_{n-1}] = (\Delta m + m_0) a$$

$$\text{整理得 } nkx_n - nkx_{n-1} = (\Delta m + m_0) \ddot{x}_n \quad (3)$$

2 计算结果和讨论

质量为 m 的质点与轻弹簧组成的弹簧振子,以固有圆频率 $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ 做简谐振动。对于弹簧质量不可忽略的弹簧振子,已有多篇论文讨论过。这些文献认为考虑弹簧质量时,弹簧振子仍然做简谐振动,弹簧质量只是改变了它的振动频率而已,这些结论是否正确?下面通过求解线性微分方程组的解来讨论这些问题。

求解线性微分方程组的方法有多种,本文以常见的四阶龙格——库塔法,并借助计算软件,对弹簧振子运动情况进行数值计算。在计算中,取步长 $H=0.001$ s,小球质量为 $m_0=0.005$ kg,弹性系数 $k=0.005$ N/m,弹簧长度 $L=0.15$ m。弹簧振子的位移随着时间的变化曲线见图3。在 $m_0/m=5$ 和 $m_0/m=50$ 两种情况下,弹簧振子作非简谐振动比较明显,振子的振幅受到周期性调制。当弹簧具有质量,弹簧上各点的位置并不能由振子的位置完全确定,弹簧的惯性将对整个系统的运动产生影响。文献[2,6]想从理论的角度去分析,但最终还是给出了近似解。严格地说弹簧振子的运动是受到无穷多个振动的影响,这些振动又是相互耦合的,很难给出一个精确的理论解。振子的振幅受到周期性调制可以通过一个粗略理论来解释,那就是整个弹簧振子系统看成由 $n-1$ 个双弹簧振子组成。单个双弹簧振子的振幅是受到周期性调制^[7]。随着弹簧质量的减少,振子的周期逐渐减少,当 $m_0/m=500$ 时,振子的振动接近于简谐振动,这正是我们所期望的结果。

图4为在不同弹性系数下,弹簧振子的位移随着时间的变化曲线。在计算过程中,我们取小球质量为 $m_0=0.005$ kg,弹簧长度 $L=0.15$ m,步长 $H=0.001$ s。

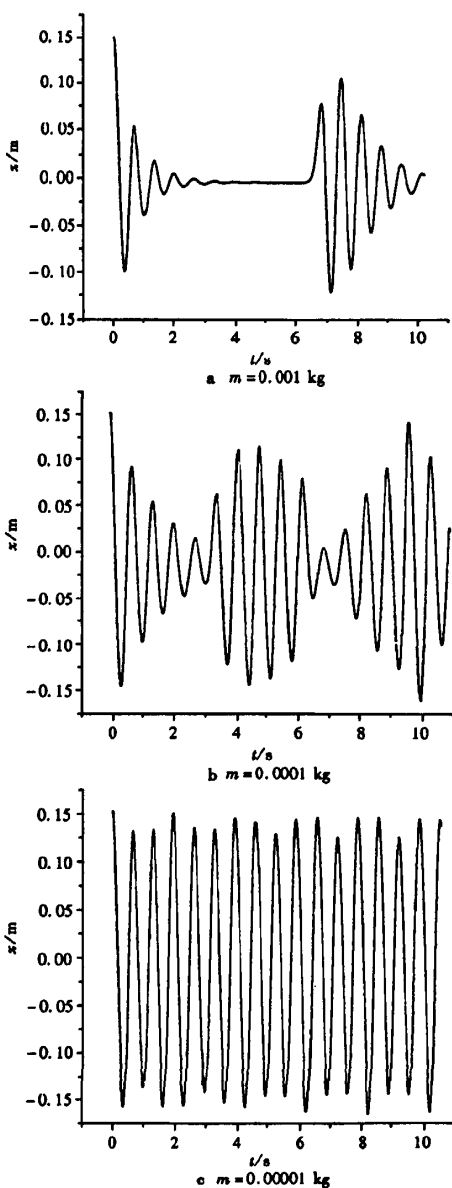


图3 在不同弹簧质量下,弹簧振子的位移随着时间的变化曲线

Fig.3 Displacement vs time mass under the conditions of different spring

从图4中可以看出,振子的振幅受到周期性调制是由于受到弹簧具有质量的影响。随着弹性系数的增大,弹簧振子的周期逐渐减小。为了定量地分析弹簧的弹性系数和弹簧振子振动角频率的关系,图5为角频率平方和弹性系数曲线,由该图中结果可以看出对于固定弹簧质量和小球质量情况下,弹簧振子的 ω 和 $\sqrt{k}$ 是成线性关系的。

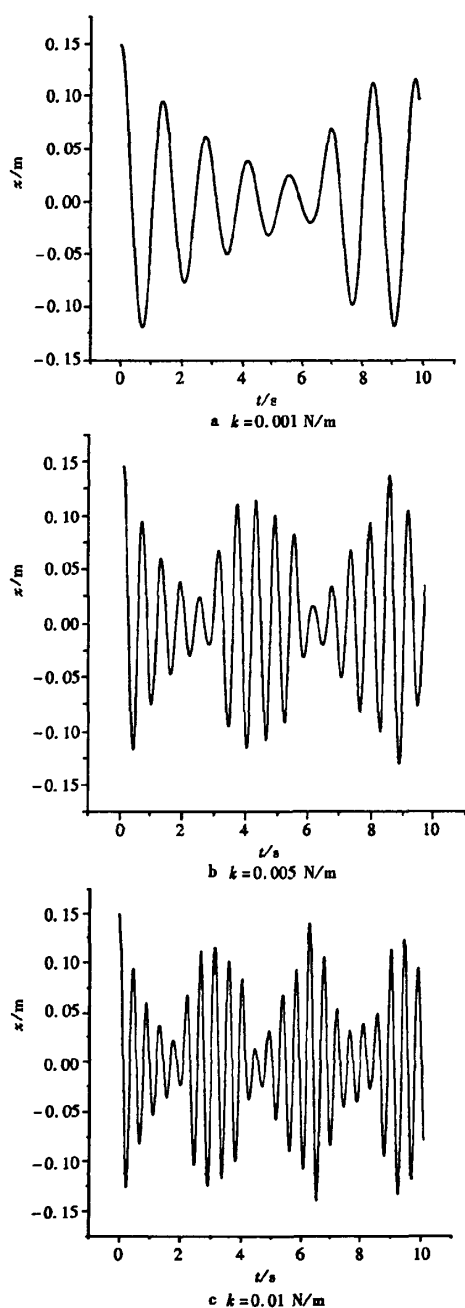


图 4 在不同弹性系数下,弹簧振子的位移
随着时间的变化曲线

Fig. 4 Displacement vs time Under the conditions of
different elasticity coefficient

图 6 为弹簧振子的周期平方随着弹簧质量的变化关系,周期平方和弹簧质量不成线性关系,所以一般情况下,有质量弹簧的弹簧振子振动周期

并非按 $T=2\pi\sqrt{\frac{m_0+1/3}{k}}$ 规律变化的。

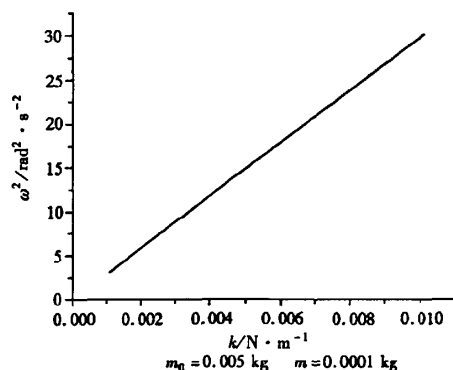


图 5 弹簧振子的角频率平方随着
弹簧弹性系数的变化曲线

Fig. 5 squared angular frequency as a
function elasticity coefficient

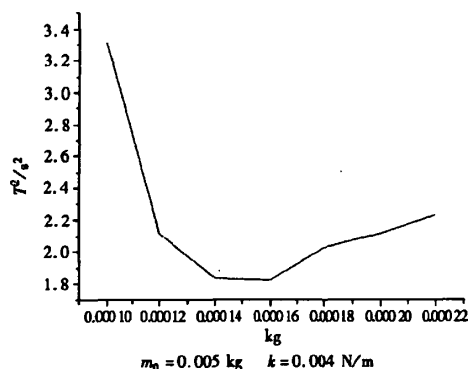


图 6 弹簧振子的周期平方随着弹簧质量的变化曲线

Fig. 6 Squared periodic frequency of as a
function of elasticity coefficient

3 结语

本文利用四阶龙格——库塔方法研究了弹簧质量对弹簧振子运动的影响。通过计算发现具有弹簧质量的弹簧振子,其振动已不再是简谐振动,振子的振幅受到周期性调制。进一步研究发现具有弹簧质量的振子振动角频率平方仍然正比于弹簧的弹性系数,而周期平方和弹簧质量不成线性关系,更详细的规律我们将作进一步的研究。

(下转第 31 页)

- [6] 于澍,李溪滨,刘根山,等. 最终热处理对炭/炭复合材料摩擦磨损性能的影响[J]. 航空材料学报,2004,24(1):22-27.
- [7] 李海红,阎逢元. 热处理对石墨填充高岭土基矿物聚合物复合材料摩擦学性能的影响[J]. 润滑与密封,2007,32(8):106-110.

Research on Heat Treatment Process of Resin – based Friction Material Filled with Fly Ash

WANG Zhan-hong, HOU Gui-hua, ZHU Xiang

(Key Laboratory for Ecological – Materials of Jiangsu, Yancheng Institute of Technology, Jiangsu Yancheng 224051, China)

Abstract: Two heat treatment process parameters: heat treatment temperature and heat treatment time were studied for resin – based on friction materials containing fly ash in order to improve the tribology performance and forming techniques. It is indicated by experimentation that much better properties of friction and wear are achieved for resin – based on friction materials added fly ash on the condition of the heat treatment temperature 200 °C, the heat treatment time 10 hours.

Keywords: fly ash; resin – based friction material; friction and wear; heat treatment

(责任编辑:范大和;校对:沈建新)

(上接第26页)

参考文献:

- [1] 杨宝胜,董荣风. 弹簧的质量对弹簧谐振子角频率的影响[J]. 物理通报,1986(4):8-9.
- [2] 戴宝印,代娜. 有质量弹簧的振动解[J]. 鞍山师范学院学报,2003,5(2):45-47.
- [3] 陈秉乾. 物理学难题集萃[M]. 北京:高等教育出版社,1999:299.
- [4] 魏功民. 弹簧质量对耦合摆小振动角频率的影响[J]. 大学物理,1997,16(7):19-27.
- [5] 龚善初. 失谐耦合摆振动分析[J]. 大学物理,2005,24(8):21-24.
- [6] 康文秀. 弹簧质量对振子运动的影响[J]. 保定师范专科学校学报,2004,17(2):25-27.
- [7] 蔡旭初,高脐雯,吴文英. 双弹簧振子的振动分析[J]. 东华大学学报,2004,30(5):136-137.

The effect of mass on the motion of Oscillator

QIAN Hong

(President's office, Jiangyin Polytechnic College, Jiangsu Jiangyin 214405, China)

Abstract: Oscillator is a typical model in physics. We have found that there are many differences between the experimental result and the theory about stiffness frequency. Though there are many reasons, the main one is the effect to the stiffness by the quality. This paper will adopt four bands Runge – Kutta method to solve the result of the equation on motion of oscillator, and analyze the effect to the stiffness by the oscillator quality.

Keywords: Oscillator; fourth order Runge – Kutta method; mass of spring

(责任编辑:张英健;校对:沈建新)