

第二大特征根不超过1的 Cactus

张 荣

(盐城师范学院 数学科学学院, 江苏 盐城 224002)

摘要:图的第二大特征根与图的直径有着密切的联系,而图的直径对于网络研究有着非常重要的作用,因而研究图的第二大特征根有着很重要的实用价值。确定第二大特征根不超过1的图是图谱中著名的未解决问题,近年来人们得出了一系列关于第二大特征根不超过1的特殊简单图的结论。任意两个圈至多有一个公共顶点的简单连通图称为 Cactus。运用找出禁用子图的方法给出了第二大特征根不超过1的所有 Cactus。

关键词:Cactus; 第二大特征值; 导出子图

中图分类号:O157.5 **文献标识码:**A **文章编号:**1671-5322(2011)03-0019-04

设 $G = (V(G), E(G))$ 是 n 阶简单无向连通图, $V(G) = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ 为其顶点集, $E(G)$ 为其边集, $A = (a_{ij})$ 是一个 $n \times n$ 的 $(0, 1)$ 矩阵, 其中 $a_{ij} = 1$ 当且仅当 v_i 与 v_j 邻接。 $P(G; \lambda) = \det(\lambda I - A)$ 称为 G 的特征多项式, 其特征根可排列为 $\lambda_1(G) \geq \lambda_2(G) \geq \dots \geq \lambda_n(G)$, 称 $\lambda_2(G)$ 为 G 的第二大特征根。图的第二大特征根已被许多文献证明与图的直径有着密切的联系。为了使网络具有较高的效率, 我们希望图的直径小, 而连通度、可靠性大, 因而研究图的第二大特征根具有很重要的价值。另一方面, 由于任一图 G 的第二大特征根 $\lambda_2(G)$ 与其补图 G^c 的最小特征根 $\lambda_n(G^c)$ 满足不等式 $\lambda_2(G) + \lambda_n(G^c) \leq -1$, 而任一图的线图 $L(G)$ 的最小特征根均不小于 -2 , 因而国际著名的图谱专家 D. Cvetković 很自然地提出了“求出满足 $\lambda_2(G) \leq 1$ 的所有图 G ”这一问题^[1]。此后的 20 多年, 经过许多人的努力, 该问题的研究有所进展但尚未最终解决。1989 年, 洪渊给出了满足 $\lambda_2 < 1$ 的所有树^[2]; 1998 年, 束金龙给出了满足 $\lambda_2 = 1$ 的所有树^[3]; 2004 年, 徐光辉给出了满足 $\lambda_2(G) \leq 1$ 的所有单圈图^[4]。2005 年, 郭曙光给出了满足 $\lambda_2(G) \leq 1$ 的所有双圈图^[5]; 2006 年, 徐光辉给出了第二大根小于 1 的简单图^[6];

2008 年, Zoran Stanić 给出了第二大特征根不超过 1 的正则图和冠 (corona)^[7]; 2009 年, Zoran Stanić 给出了第二大特征根小于 1 的嵌套分割图 (nested split graph)^[8]; 2010 年, 李书超给出了满足 $\lambda_2(G) \leq 1$ 的所有三圈图^[9]。

任意两个圈至多有一个公共顶点的简单连通图称为 Cactus。边数等于顶点数减 1 的简单连通图称为树, 边数等于顶点数的简单连通图称为单圈图。所有的树和单圈图都是 Cactus。Cactus 被许多学者研究过, 例如 [10, 11]。本文主要研究 Cactus 的第二大特征根, 运用找出禁用子图的方法给出了满足 $\lambda_2(G) \leq 1$ 的所有 Cactus。

1 引理

用 C_n 和 P_n 分别表示 n 阶圈和路, $K_{1, n-1}$ 表示 n 阶星图, 用 $G-x$ 表示图 G 删除点 x 以后得到的图, $x \in V(G)$ 。设 C_p 和 C_q 是两个没有公共点的圈, $v_1 \in C_p, v_l \in C_q$ 。 v_1 和 v_l 之间用长为 $l-1$ 的路 $v_1 v_2 \dots v_l$ 相连, 其中 $l \geq 1, l=1$ 表示 v_1 和 v_l 重合, 称所得的图为 ∞ -型图, 简记为 $B(p, l, q)$, 如图 1 所示。

引理 1^[12] 设 V' 是图 G 的顶点集的一个子集, $|V(G)| = n$ 且 $|V'| = k$, 则

收稿日期: 2011-08-10

基金项目: 江苏省自然科学基金资助项目 (BK2010292)

作者简介: 张荣 (1981-), 男, 江苏盐城人, 讲师, 硕士, 主要研究方向为运筹学与控制论。



图 1 $B(p, l, q)$

Fig.1 $B(p, l, q)$

$$\lambda_i(G) \geq \lambda_i(G - V') \geq \lambda_{i+k}(G),$$

$$(1 \leq i \leq n - k)$$

引理 2^[4] 设 u 是 G 的一个顶点, $N(u)$ 是所有与 u 相邻的顶点组成的集合, $C(u)$ 是所有包含 u 的圈组成的集合, 则图 G 的特征多项式满足

$$P(G; \lambda) = \lambda P(G - u; \lambda) -$$

$$\sum_{v \in N(u)} P(G - u - v; \lambda) - 2 \sum_{Z \in C(u)} P(G \setminus V(Z); \lambda)$$

引理 3^[3] 设 T 为树, 则

(1) $\lambda_2(T) < 1$ 当且仅当 T 同构于 P_2 或 $K_{1, n-1}$ 或 $S(1, n-3)$ 。

(2) $\lambda_2(T) = 1$ 当且仅当 T 同构于 $S(2, 2)$ 或 $H(n_3, l)$ 。

其中 $S(n_1, n_2)$ 表示双星图, 即在 P_2 的一端接出 n_1 条悬挂边, 另外一端接出 n_2 条悬挂边后所得到的图。图 $H(n_3, l)$ 是在图 P_5 的中间顶点接出 n_3 条悬挂边和 l 条长为 2 的悬挂路所得的树, 如图 2 所示。

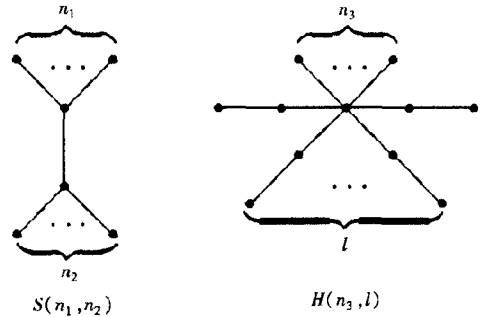


图 2 $S(n_1, n_2), H(n_3, l)$

Fig.2 $S(n_1, n_2), H(n_3, l)$

引理 4^[4] 单圈图 G 满足 $\lambda_2(G) \leq 1$ 当且仅当图 G 为 C_6 或者为 $G_i (i = 1, \dots, 14)$ 的单圈导出子图(图 3)。

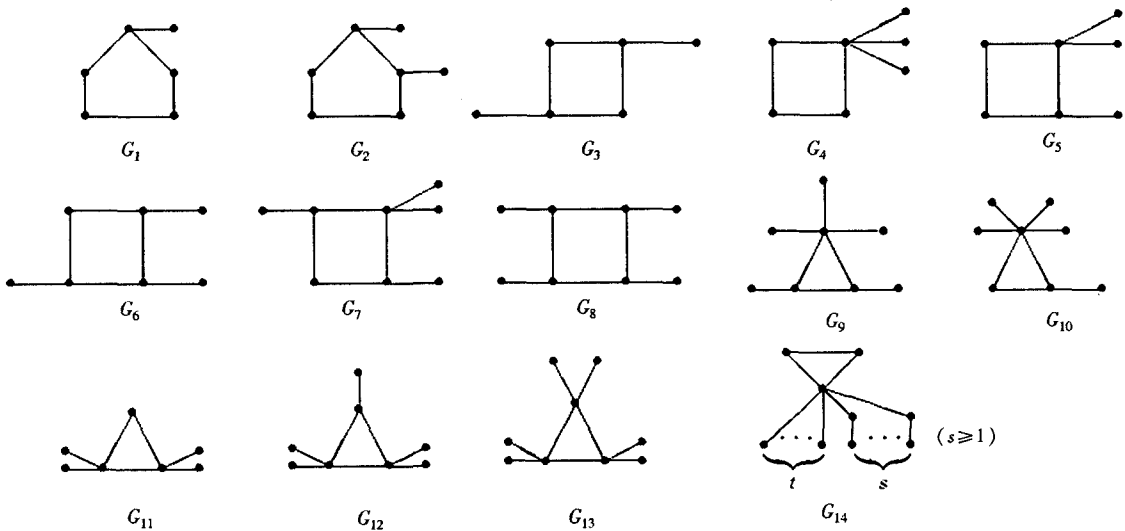


图 3 $G_i (1 \leq i \leq 14)$

Fig.3 $G_i (1 \leq i \leq 14)$

引理 5^[5] 图 4 所示的 3 个图的第二大特征根大于 1。

引理 6^[5] 若图 G 为 Cactus 且 G 恰含两个圈, 则有 $\lambda_2(G) \geq 1$, 等号成立当且仅当图 G 为图 5 所示, 记为 $C_{2, s, t}$, 其中 $s \geq 0, t \geq 0$ 。

记 $C_{r, s, t}$ 为图 6 所示类型图。当 $r = s = 0$ 时,

$C_{r, s, t}$ 为星图; 当 $r = 0, s = 1$ 时, $C_{r, s, t}$ 为 $S(1, n-3)$; 当 $r = 0, s \geq 2$ 时, $C_{r, s, t}$ 为 $H(n_3, l)$ 。

2 主要结果

定理 设 G 为 Cactus, 则 G 满足 $\lambda_2(G) \leq 1$ 当且仅当图 G 为图 6 所示 $C_{r, s, t} (r \geq 0, s \geq 0, t \geq$

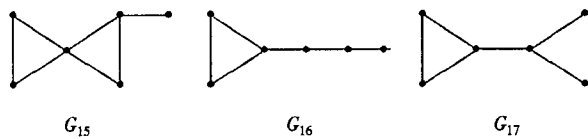


图4 $G_i (15 \leq i \leq 17)$
Fig.4 $G_i (15 \leq i \leq 17)$

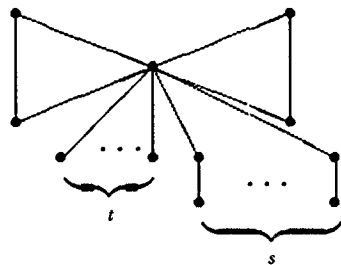


图5 $C_{2,s,t}$
Fig.5 $C_{2,s,t}$

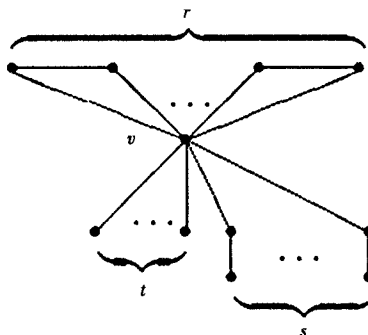


图6 $C_{r,s,t}$
Fig.6 $C_{r,s,t}$

0)或 C_6 或 $G_i (i = 1, \dots, 13)$ 的连通导出子图。

证明 文献[7]指出,所有不超过5个顶点的图 G 都满足 $\lambda_2(G) \leq 1$ 。容易看出,不超过5个顶点的 Cactus 为 $C_{r,s,t}$ 或 $G_i (i = 1, \dots, 13)$ 的连通导出子图。

下面假定图 G 的阶数大于5,当 G 为树时,根据引理3, $\lambda_2(G) \leq 1$ 当且仅当图 G 为 $S(2,2)$ 或 $C_{r,s,t} (r=0, s \geq 0, t \geq 0)$, 而 $S(2,2)$ 可以看作是 G_{13} 的导出子图;当 G 为单圈图时,根据引理4, $\lambda_2(G) \leq 1$ 当且仅当图 G 为 $C_{r,s,t} (r=1, s \geq 0, t \geq 0)$ 或 C_6 或 $G_i (i = 1, \dots, 13)$ 的连通导出子图。

当 G 含有圈的个数为 $r (r \geq 2)$ 时,证明步骤如下。

首先,我们证明,若图 G 满足 $\lambda_2(G) \leq 1$, 则 G 的所有的圈必交于一点。假设 G 中存在两个圈没有交于一点,则 G 必有一个 ∞ -型图 $B(p, l, q)$

作为其导出子图,其中 $l > 1$ 。由引理1和引理6知, $\lambda_2(G) \geq \lambda_2(B(p, l, q)) > 1$, 矛盾。

其次,我们证明,若图 G 满足 $\lambda_2(G) \leq 1$, 则这些交于一点的 r 个圈的圈长都只能是3, $r \geq 2$ 。假设图 G 中存在一个圈,其圈长为 $p > 3$, 则 G 必有一个 ∞ -型图 $B(p, 1, q)$ 作为其导出子图。由引理1和引理6知, $\lambda_2(G) \geq \lambda_2(B(p, 1, q)) > 1$, 矛盾。

最后,我们证明,若图 G 满足 $\lambda_2(G) \leq 1$, 则图 G 必为 $C_{r,s,t}$, 其中 $s \geq 0, t \geq 0, r \geq 2$ 。前面两步已经证明,满足 $\lambda_2(G) \leq 1$ 的 Cactus 的所有圈都交于一点且圈长都是3,不妨把这个点记为 v , 下面证明,图 G 只能是 v 上接出一些树所得到的图。事实上,如果这些树接在圈的其它任一顶点上,则图 G 必含有导出子图 G_{15} , 根据引理1和引理5, $\lambda_2(G) > 1$, 矛盾;其次,所接的树为长度不超过2的路,否则图 G 必含有导出子图 G_{16} 或 G_{17} , 根据引理1和引理5, $\lambda_2(G) > 1$, 矛盾。

另一方面,对于 $C_{r,s,t} (r \geq 2, s \geq 0, t \geq 0)$, 对顶点 v 应用引理2,有

$$P(G; \lambda) = \lambda^{t-1}(\lambda^2 - 1)^{s+r-1}(\lambda^4 - (1 + t + s + 2r)\lambda^2 - 2\lambda r + t)$$

记 $g(\lambda) = \lambda^4 - (1 + t + s + 2r)\lambda^2 - 2\lambda r + t$, 则 $g(0) = t \geq 0, g(1) = -s - 4r \leq 0, g(-1) = -s$, 从而 $g(\lambda) = 0$ 只有一个根大于1, 因此 $C_{r,s,t} (r \geq 3, s \geq 0, t \geq 0)$ 的第二大特征根等于1。

综上所述,若 G 为 Cactus, 则 G 满足 $\lambda_2(G) \leq 1$ 当且仅当图 G 为图6所示 $C_{r,s,t} (r \geq 0, s \geq 0, t \geq 0)$ 或 C_6 或 $G_i (i = 1, \dots, 13)$ 的连通导出子图。

进一步地,我们可以得到如下结果:

推论1 设图 G 为 n 阶 Cactus, $n \geq 10$, 则 $\lambda_2(G) = 1$ 当且仅当 G 为 $C_{r,s,t}$, 其中 $s + r \geq 2$; $\lambda_2(G) < 1$ 当且仅当 G 为 $C_{0,1,n-3}$ 或 $C_{0,0,n-1}$ 或 $C_{1,0,n-3}$ 。

证明 由于图 G 为 Cactus, 当 $n \geq 10$ 且 $\lambda_2(G) = 1$ 时,根据定理7及其证明知, G 为 $C_{r,s,t}$, 其中 $2s + 2r + t \geq 9$ 。若 G 为树,根据引理3, $s \geq 2$; 若 G 为单圈图,根据引理4, $r = 1, s \geq 1$; 若 G 为双圈图,根据引理6, $r = 2, s \geq 0$; 当 G 包含圈的个数大于等于3时,结论显然成立;另一方面,由计算知 $\lambda_2(C_{r,s,t}) = 1 (s + r \geq 2)$ 。

而 $\lambda_2(G) < 1$ 当且仅当 G 为 $C_{r,s,t}$, 其中 $s + r \leq 1$ 。当 $s + r = 1$ 时,图 G 为 $C_{0,1,n-3}$ 或 $C_{1,0,n-3}$; 当 $s + r = 0$ 时,图 G 为 $C_{0,0,n-1}$ 。另一方面,根据引理3和文献[4], $\lambda_2(C_{0,1,n-3}) < 1, \lambda_2(C_{0,0,n-1}) < 1,$

$\lambda_2(C_{1,0,n-3}) < 1$ 。从而推论成立。
 推论 2 设图 G 为 n 阶 Cactus, $n \geq 10$, 则 $\lambda_2(G) = 1$ 时, 边独立数 q 满足 $s + r = q - 1, t \geq 1$, 或 $s + r = q, t = 0$ 。

参考文献:

- [1] Cvetkovic D. On graphs whose second largest eigenvalue dose not exceed 1 [J]. Publ. Inst. Marh. (beograd), (N. S.) 1982, 31(45): 5 - 20.
- [2] Hong Y. Sharp lower bounds on the eigenvalue of trees [J]. Linear Algebra Appl, 1989, 113: 101 - 105.
- [3] Shu J. L. On trees whose second largest eigenvalue dose not exceed 1 [J]. OR Trans, 1998, 2(3): 6 - 9.
- [4] Xu C. H. On unicyclic graphs whose second largest eigenvalue dose not exceed 1 [J]. Discrete Appl Math, 2004, 136: 117 - 124.
- [5] Guo S. G. On bicyclic graphs whose second largest eigenvalue dose not exceed 1 [J]. Linear Algebra Appl, 2005, 407: 201 - 210.
- [6] 徐光辉, 邵嘉裕. 第二大根小于 1 的简单图 [J]. 系统科学与数学, 2006, 26(1): 121 - 128.
- [7] Stanic Z. On regular graphs and coronas whose second largest eigenvalue does not exceed 1 [J]. Linear And Multilinear Algebra, 2010, 58(5): 545 - 554.
- [8] Stanic Z. On nested split graphs whose second largest eigenvalue is less than 1 [J]. Linear Algebra Appl, 2009, 2200 - 2211.
- [9] Li S. C., Yang H X. On tricyclic graphs whose second largest eigenvalue dose not exceed 1 [J]. Linear Algebra Appl, 待发表.
- [10] Radosavljevic Z, Rasajski M. A class of reexive cactuses with four cycles [J]. Publ. Elektrotehn. Fak, Ser. Mat, 2003, 14: 64 - 85.
- [11] Li S C, Zhang M J. On the signless Laplacian index of cacti with a given number of pendant vertices [J]. Linear Algebra Appl, 待发表.
- [12] Cvetkovic D, Doob M, Sachs H. Spectra of graphs [M]. New York: Academic Press, 1980.

On Cactuses Whose Second Largest Eigenvalue Does Not Exceed 1

ZHANG Rong

(School of Mathematical Science, Yancheng Teachers University, Yancheng Jiangsu 224002, China)

Abstract: The second largest eigenvalue of a graph is closely related to its diameter, and the diameter is very important for a network. Therefore, it is of great practical value to study the second largest eigenvalue of graphs. Determining all the graphs whose second largest eigenvalue does not exceed one is a well-known unsolved problem in spectra of graphs. In recent years, researchers determined serious special simple graphs whose second largest eigenvalue does not exceed one. The connected simple graph G is a cactus if any two of its cycles have at most one common vertex. The cactuses whose second largest eigenvalue dose not exceed one have been determined by forbidding subgraph.

Keywords: cactus; eigenvalue; induced subgraph

(责任编辑:张英健)