

Banach 空间中无穷时滞积分微分方程适度解的存在性

练婷婷

(盐城工学院 基础教学部, 江苏 盐城 224051)

摘要:利用相空间的方法,结合 Hausdorff 非紧测度、强连续半群、不动点理论,研究相关半群在失去紧性的情况下,Banach 空间中无穷时滞积分微分方程适度解的存在性,改进和推广了已有的结果。

关键词:Hausdorff 非紧测度;相空间;积分微分方程; C_0 -半群;适度解

中图分类号:O172 **文献标识码:**A **文章编号:**1671-5322(2011)04-0018-04

时滞型方程的研究始于 20 世纪 70 年代, Travis 和 Webb 最早在文献[1,2]中研究了一类时滞方程解的存在性和稳定性。由于时滞方程能够更真实的反映物理变化过程,近来受到了很多学者的关注,取得很丰富的成果^[3],本文利用 Hausdorff 非紧测度、解析半群和不动点理论研究半群 $\{T(t):t \geq 0\}$ 失去紧性的条件下,Banach 空间 X 中具有非局部条件的时滞型积分微分方程

$$\frac{d}{dt}x(t) =$$

$$Ax(t) + \int_0^t K(t,s)f(s,x_s)ds, t \in [0,b]; (1)$$

$$x_0 = \phi \in B (2)$$

适度解的存在性。其中 A 为解析半群 $\{T(t):t \geq 0\}$ 的无穷小生成元, B 为相空间, $f:[0,b] \times B \rightarrow X$ 为适当函数, $x_t(\theta) = x(t+\theta), \theta \in (-\infty, 0], K:[0,b] \times [0,b] \rightarrow R^+$ 是给定函数, b 为正常数。

1 预备知识

本文总假定空间 X 是一个 Banach 空间,并赋予通常意义下的范数 $\|\cdot\|$ 。 $C([a,b],X)$ 表示定义在区间 $[a,b]$ 上取值于 X 上的连续函数空间,按范数 $\|x\| = \sup\{\|x(s)\|, s \in [a,b]\}$ 构成 Banach 空间, $A:D(A) \subset X \rightarrow X$ 是 X 上强连续算子半群 $\{T(t):t \geq 0\}$ 的无穷小生成元。可测函数 $x:[a,b] \rightarrow X$ 称为是 Bochner 可积的,当且仅当 $t \rightarrow \|x(t)\|$ 是 Lebesgue 可积的。记为 $L^1([a,b],X) = \{x:[a,b] \rightarrow X | x \text{ 是 Bochner 可积}\}$,其范数

定义为 $\|x\|_{L^1} = \int_a^b \|x(t)\| dt$ 。 $Y(t) = d(x, G(t)) = \inf\{\|x-z\|: x \in G(t)\}$,满足 $Y \in L^1([0,b],R)$ 。

在无穷时滞微分方程理论中,相空间的选择起着重要作用。我们采用 HALE 和 KATO^[4]公理化方法引入相空间的定义,相关术语参见文献[7]。

公理 1 相空间 B 是由 $(-\infty, 0]$ 到 X 的一些函数构成的集合,赋予半范数 $\|\cdot\|_B$,满足下列公理:若 $x:(-\infty, \sigma+b) \rightarrow X, b > 0$ 使得 $x_\sigma \in B, x|_{[\sigma, \sigma+b]}$ 连续,则 $\forall t \in [\sigma, \sigma+b]$,且下列条件成立:(1) $x_t \in B$;(2) $\|x(t)\| \leq H \|x(t)\|_B$;(3) $\|x_t\| \leq K(t-\sigma) \sup\{\|x(s)\|: \sigma \leq s \leq t+M(t-\sigma)\} \|x_\sigma\|_B$ 。这里 $H > 0$ 为常数, $K:(0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ 连续, $M:[0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ 局部有界, H, K, L, M 与 $x(\cdot)$ 无关。这样的函数 $x(\cdot)$,映射 $t \rightarrow x_t \in B$ 在 $[\sigma, \sigma+b]$ 连续。

定义 1 设 Y 是实 Banach 空间, B 是 Y 中任一有界子集,令 $\chi_Y(B) = \inf\{r > 0; B \text{ 在 } Y \text{ 中能被有限个半径不大于 } r \text{ 的球所覆盖}\}$,则称 $\chi_Y(B)$ 为 B 在 Y 中的 Hausdorff 非紧测度。

引理 1^[6] 设 Y, Z 是实 Banach 空间, B, C 是 Y 中有界集,则有下列性质:

(1) B 是相对紧的 $\Leftrightarrow \chi_Y(B) = 0$;

(2) $\chi_Y(B) = \chi_Y(\bar{B}) = \chi_Y(\text{conv} B)$,其中 $\bar{B}$ 和 $\text{conv} B$ 分别是闭包和凸包;

(3) 若 $B \subseteq C \Rightarrow \chi_Y(B) \leq \chi_Y(C)$;

收稿日期:2011-06-21

作者简介:练婷婷(1983-),女,江苏盐城人,讲师,硕士,主要研究方向为泛函分析。

(4) $\chi_Y(B+C) \leq \chi_Y(B) + \chi_Y(C)$, 其中 $B+C = \{x+y; x \in B, y \in C\}$;

(5) $\chi_Y(B \cup C) \leq \max\{\chi_Y(B), \chi_Y(C)\}$;

(6) $\chi_Y(\lambda B) = |\lambda| \chi_Y(B)$, 其中 $\lambda \in R, \lambda B = \{\lambda x; x \in B\}$;

(7) 若映射 $Q: D(Q) \subseteq Y \rightarrow Z$ 是 Lipschitz 连续的, 且 Lipschitz 常数为 k , 则对任意有界集 $B \subseteq D(Q)$, 有 $\chi_Z(QB) \leq k \chi_Y(B)$;

(8) $\chi_Y(B) = \inf\{d_Y(B, C); C \subseteq Y \text{ 相对紧}\} = \inf\{d_Y(B, C); C \subseteq Y \text{ 为有限值}\}$, 其中 $d_Y(B, C)$ 是 B, C 在 Y 中的 Hausdorff 度量距离;

(9) 若 $\{W_n\}_{n=1}^\infty$ 是 Y 中一个非空有界闭子集的递减序列, 且满足 $\lim_{n \rightarrow \infty} \chi_Y(W_n) = 0$, 则 $\bigcap_{n=1}^\infty W_n$ 是 Y 中非空紧集。

定义 2 设 Y 是实 Banach 空间, $\Gamma: Y \rightarrow Y$ 连续有界, 若存在正常数 $k < 1$, 使得对任意的有界集 $C \subseteq W$ 都满足 $\chi_Y(\Gamma(C)) \leq k \chi_Y(C)$ 则称 Γ 是 W 上严格集压缩映象。

引理 2 W 是 Banach 空间中一个非空闭凸子集, $\Gamma: W \rightarrow W$ 是一个上半连续紧映射, 且任意 $x \in W, \Gamma x$ 是 W 中非空闭凸子集。则 Γ 有不动点。

本文记 χ 为 X 中 Hausdorff 的非紧测度, χ_c 为 $C([a, b]; X)$ 中 Hausdorff 非紧测度。

引理 3 若 $W \subseteq C([a, b], X)$ 有界, 则对任意 $t \in [a, b]$, 有 $\chi(W(t)) \leq \chi_c(W)$, 其中 $W(t) = \{u(t); u \in W\} \subseteq X$, 若 W 在 $[a, b]$ 上是等度连续, 则 $\chi(W(t))$ 在 $[a, b]$ 上连续, 且 $\chi_c(W) = \sup\{\chi(W(t)), t \in [a, b]\}$ 。

引理 4 若 $\{u_n\}_{n=1}^\infty \subset L^1(a, b; X)$ 是一致可积的, 则 $\chi(\{u_n\}_{n=1}^\infty)$ 是可测的, 且

$$\chi\left(\int_a^t u_n(s) ds\right)_{n=1}^\infty \leq 2 \int_a^t \chi(\{u_n(s)\}_{n=1}^\infty) ds \quad (3)$$

引理 5 若 $W \subseteq C([a, b], X)$ 有界且等度连续, 则 $\chi(W(s))$ 连续, 且

$$\chi\left(\int_a^t W(s) ds\right) \leq \int_a^t \chi(W(s)) ds, (\forall t \in [a, b]) \quad (4)$$

其中 $\int_a^t W(s) ds = \left\{ \int_a^t x(s) ds; x \in W \right\}$

定义 3 $L^1(a, b; X)$ 中的可数集 $\{f_n\}_{n=1}^\infty$, 若对几乎所有的 $t \in [a, b]$, 满足下面两个条件, $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ 称为是半紧的: (1) 序列 $\{f_n(t)\}_{n=1}^\infty$ 在 X 中紧; (2) 存在函数 $\mu \in L^1(a, b; R^+)$, 使得 $\sup_{n \geq 1}$

$$\|f_n(t)\| \leq \mu(t)。$$

定义 4 X 是 Banach 空间, $M \subset X$, 若对于 M 中的任意序列 $\{x_n\}_{n=1}^\infty$, 都存在子列 $\{x_{n_i}\}$ 及 $x_0 \in M$, 使得 $x_{n_i} \rightarrow x_0$ 。

引理 6 $L^1(a, b; X)$ 中每个半紧集都是弱紧的。

定义 5 若对任意有界集 $B \subset X, t > 0, t \rightarrow \{T(t)x; x \in B\}$ 都等度连续, 则称半群 $T(t)$ 等度连续。

引理 7 若半群 $T(t)$ 等度连续, $\eta \in L(a, b; R^+)$, 则对任意 $t \in [a, b]$ 集合 $\left\{ \int_0^t T(t-s)u(s) ds, \|u(s)\| \leq \eta(s), a. e. s \in [0, b] \right\}$ 等度连续。

定义 6 如果 $x \in C([-q, b], X)$ 满足

$$x(t) = \begin{cases} \phi(t), & t \in [-q, 0] \\ T(t) + \int_0^t T(t-s) \int_0^s K(s, r) f(r, x_r) dr ds, & t \in [0, b] \end{cases} \quad (5)$$

则称 x 是方程 (1) ~ (2) 的适度解。

2 主要结果

这个部分利用 Hausdorff 非紧测度的方法给出非局部问题 (1) ~ (2) 适度解的存在性。首先给出下列假设:

(HA): A 是强连续半群 $T(t) (t \geq 0)$ 的无穷小生成元, $T(t)$ 等度连续, 且存在 $M (M > 1)$, 使得: $\|T(t)\| \leq M$;

(Hf): $f: [0, b] \times B \rightarrow X, (t, u) \rightarrow f(t, u)$ 满足:

(1) 对任意 $u \in B$ 关于 t 可测; 对几乎所有的 $t \in [0, b]$, 关于 u 上半连续;

(2) 存在函数 $h: [0, b] \times R^+ \rightarrow R^+$ 使得 $h(\cdot, \cdot, s) \in (0, b; R^+) (\forall s \geq 0)$; $h(t, \cdot)$ 对几乎所有的 $t \in [0, b]$ 连续且递增; 对几乎所有的 $t \in [0, b]$, $\forall u \in B$ 有 $\|f(t, u)\| := \sup\{|v|; v = f(t, u)\} \leq h(t, |u|_{[-q, 0]})$; 任意正常数 K_1, K_2 标量方程

$$m(t) = K_1 + K_2 \int_0^t h(s, m(s)) ds \quad (t \in [0, b]) \quad (6)$$

至少有一个解。

(3) 对几乎所有的 $t \in [0, b]$, $\forall \Omega \subset B, \Omega$ 有界, 且存在 $\eta \in L(0, b; R^+)$ 使得

$$\chi(f(t, \Omega)) \leq \eta(t) \chi(\Omega(0)), a. e. t \in [0, b] \quad (7)$$

其中 $\Omega(0) = \{u(0); u \in \Omega\}$

(HK)(1): $\forall t \in [0, b], K(t, \cdot)$ 在 $[0, t]$ 上可测, 且 $K(t) = \text{esssup} \{ |K(t, s)| : 0 \leq s \leq t \}$ 在 $[0, b]$ 上有界。

(2): 映射 $t \rightarrow K_t: [0, b] \rightarrow L(0, b; R), K_t(s) = K(t, s)$ 连续。

下面记“ $\rightarrow$ ”为强收敛, “ $\rightharpoonup$ ”为弱收敛, conv 为凸包, $\overline{\text{conv}}$ 为凸闭包。

定理 1 若假设 (HA), (Hf), (HK) 都满足, 则任意 $\phi \in B$, 方程 (1) ~ (2) 至少有一个适度解。

证明: 设 $K = \sup_{0 \leq t \leq b} |K(t)|; m: [-q, b] \rightarrow R^+$ 满足

$$m(t) = \begin{cases} M \|\phi\|_{[-q, 0]} & t \in [-q, 0] \\ M \|\phi\|_{[-q, 0]} + bMK \int_0^t h(s, m(s)) ds & t \in [0, b] \end{cases} \quad (8)$$

定义函数 $\Gamma: C([-q, b]; X) \rightarrow C([-q, b]; X)$ 满足 $\forall x \in C([-q, b]; X)$ 有

$$\Gamma x(t) = \begin{cases} \phi(t), t \in [-q, 0] \\ T(t) + \int_0^t T(t-s) \int_0^s K(s, r) f(r, x_r) dr ds, t \in [0, b] \end{cases}$$

记 $W_0 = \{x \in C([-q, b]; X) : \sup_{-q \leq s \leq t} \|x(s)\| \leq m(t), \forall t \in [-q, b]\}$ 则 $W_0 \subset C([-q, b]; X)$ 且 W_0 是有界凸的。定义 $W_1 = \overline{\text{conv}} \Gamma W_0$, 则 $W_1 \subset C([-q, b]; X)$ 是凸闭的, 且 $\forall x \in C([-q, b]; X)$, 对任意 $t \in [-q, 0], \|\Gamma x(t)\| = \|\phi(t)\|_{[-q, 0]} \leq \|\phi\|_{[-q, 0]} \leq M \|\phi\|_{[-q, 0]}$; 对任意 $t \in [0, b], \|\Gamma x(t)\| \leq M \|\phi\|_{[-q, 0]} + M \int_0^t \int_0^s |K(s, r)| h(r, m(r)) dr ds \leq M \|\phi\|_{[-q, 0]} + MK \int_0^t \int_0^s h(r, m(r)) dr ds \leq M \|\phi\|_{[-q, 0]} + bMK \int_0^t h(r, m(r)) ds$;

所以 $t \in [-q, 0]$ 时, $\sup_{-q \leq s \leq t} \|\Gamma x(s)\| \leq m(t)$;

$t \in [0, b]$ 时, $\sup_{-q \leq s \leq t} \|\Gamma x(s)\| \leq M \|\phi\|_{[-q, 0]} + bMK \sup_{-q \leq s \leq t} \int_0^s h(r, m(r)) dr \leq M \|\phi\|_{[-q, 0]} + bMK \int_0^t h(r, m(r)) ds = m(t)$ 。

由上可知, $W_1 \subset W_0, W_1$ 有界。由 $\{T(t): t \geq 0\}$ 的等度连续性及其引理 7 可得, W_1 在 $[0, b]$ 上等度连续。定义 $W_{n+1} = \overline{\text{conv}} \Gamma W_n (n = 1, 2, \dots)$, 由上述证明过程可知: $\{W_n\}_{n=1}^\infty$ 是递减序列, 在 $[-q, b]$ 上等度连续, 且 $\{W_n\}_{n=1}^\infty$ 是 $C([-q, b]; X)$ 中的非空有界闭凸集。对任意 $n \geq 1$, 当 $t \in [-q, 0]$

时, $\chi(W_n(t)) = 0$; 当 $t \in [0, b]$ 时, $W_n(t)$ 和 $\Gamma W_n(t)$ 均为 X 上有界子集。所以任意 $\varepsilon > 0$, 存在序列 $\{x_k\}_{k=1}^\infty \subset W_n$ 使得 $\chi(W_{n+1}(t)) = \chi(\Gamma W_n(t)) \leq 2\chi(\{\Gamma x_k(t)\}_{k=1}^\infty) + \varepsilon \leq 2\chi(\int_0^t T(t-s) \int_0^s K(s, r) f(r, x_r) dr ds) + \varepsilon$

由引理 1、4、5 及 (Hf)(3) 知:

$$\begin{aligned} \chi(W_{n+1}(t)) &= \chi(\Gamma W_n(t)) \leq \\ 2M \int_0^t \chi(\int_0^s K(s, r) f(r, x_r) dr) ds + \varepsilon &\leq \\ 4M \int_0^t \int_0^s |K(s, r)| \chi(f(s, x_r)) dr ds + \varepsilon &\leq \\ 4MK \int_0^t \int_0^s \chi(f(r, x_r)) dr ds + \varepsilon &\leq \\ 4MKb \int_0^t \chi(f(s, x_s)) ds + \varepsilon &\leq \\ 4MKb \int_0^t \eta(s) \chi(x_s(0)) ds + \varepsilon &\leq \\ 4MKb \int_0^t \eta(s) \chi(x_s(0)) ds + \varepsilon &\leq \\ 4MKb \int_0^t \eta(s) \chi(W_n(s)) ds + \varepsilon \end{aligned}$$

其中 $\Omega = \{x_k\}_{k=1}^\infty \subset W_n$, 由 ε 的任意性可知:

$$\chi(W_{n+1}(t)) \leq 4bMK \int_0^t \chi(W_n(s)) ds \quad (9)$$

定义函数 $g_n: [-q, b] \rightarrow [0, +\infty]$, 满足 $g_n(t) = \chi(W_n(t))$,

由上可知: 当 $t \in [-q, 0]$ 时, $\chi(W_n(t)) = 0$ 。

由 (11) 知: 当 $t \in [0, b]$ 时,

$$g_{n+1}(t) = \chi(W_{n+1}(t)) = 4MKb \chi(\int_0^t \eta(s) g_n(s) ds) \quad (10)$$

任意 $t \in [-q, b]$, 令 $g(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(t)$, 因为 W_n 单调递减, 所以 $g(t)$ 存在, 且当 $t \in [-q, 0]$ 时 $g(t) = 0$, 在 (10) 式中令 $n \rightarrow \infty$ 得:

$$g(t) = 4bMK \int_0^t \eta(s) g(s) ds, t \in [0, b] \quad (11)$$

从而 $g(t) = 0, \therefore \forall t \in [-q, b]$ 有 $g(t) = 0$, 由引理 3 得 $\lim_{n \rightarrow \infty} \chi_c(W_n) = 0$ 。

由引理 1 知: $W = \bigcap_{n=1}^\infty W_n \subset C([-q, b]; X)$ 是非空紧凸集且 $\Gamma W \subset W$ 。则 $\Gamma: W \rightarrow 2^W$ 紧。

任意 $x \in W$, 显然 $\Gamma x \in W$ 非空。易证 $\Gamma x \in W$ 是闭凸的。从而可得 Γ 是上半连续的。由引理 2, Γ 在 W 中至少存在一个不动点, 其为方程 (1) ~ (2) 的适度解。

参考文献:

- [1] Travis C C, Webb G F. Existence and stability for reversible semigroups of Lipschitzian mappings in Banach spaces[J]. Dynamic Systems and Applications, 2000(9): 255 – 268.
- [2] Travis C C, Webb G F. Existence and stability and compactness in the α -norm for partial functional differential equations [J]. Trans Amer Math Soc, 1978(240): 129 – 143.
- [3] Xue Xin – mei, Semilinear Nonlocal differential equations with measure of noncompactness in Banach spaces[J]. Mathematical Biquarterly, 2007(24): 264 – 275.
- [4] Hale J K, Kato J. Phase space for retarded equations with infinite delay[J]. Funkcial Ekvac, 1978(21): 11 – 41.
- [5] Hino Y, Murakami S, Naito T. Functional differential equations with infinite delay[M]. Berlin: Springer Verlag, 1991.
- [6] Banaś J, Goebel K. Measure of Noncompactness in Banach spaces, Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics[M]. Marcel New York: Dekker, 1980: 60.
- [7] Agarwal R, Meehan M, O'Regan D. Fixed point theory and applications, Cambridge Tracts in Mathematics[M]. England: Cambridge University press, 2001.
- [8] Kamenskii M, Obukhovskii V, Zecca P. Condensing Multivalued Maps and semilinear near differential inclusions in Banach Spaces[J]. De Gruyterser, 2001(7): 120 – 125.

Existence of Solutions to Delay Integrodifferential Inclusions in Banach Spaces

LIAN Ting-ting

(Department of Fundamental Sciences, Yancheng Institute of Technology, Yancheng Jiangsu 224051, China)

Abstract: In this paper, we study the existence of mild solutions of integrodifferential inclusions with delay in Banach spaces. When semigroup is no need to be compact by using the phase space method, the Hausdorff's measure of noncompactness and fixed point theorem. The results we obtained are a generalization and continuation of the recent results on this issue.

Keywords: Hausdorff measure of noncompactness; phase space; integrodifferential equations – semigroup; mild solution

(责任编辑: 张英健)