

库仑摩擦最速降曲线问题的讨论

史友进, 俞晓明

(盐城工学院 基础部, 江苏 盐城 224051)

摘要: 库仑摩擦轨道上的最速降线问题是一个受到众多研究者关注的问题。根据变分法及其变量变换不变性的性质, 得到了轨道切线方向与 x 轴的夹角及其对时间的导数构造可能极值函数能够满足的端点条件, 以经典的无摩擦的最速降问题作了验证。据此, 求得了库仑摩擦最速降线的解析表达式, 分析归纳了库仑摩擦最速降轨迹斜率的匀变性、尺度的相似性、轨迹函数依摩擦系数的分簇性和运动的临界性等基本性质。

关键词: 变分法; 变量变换不变性; 最速降曲线; 库仑摩擦; 临界性

中图分类号: O302 **文献标识码:** A **文章编号:** 1671-5322(2012)02-0001-04

光滑轨道上的最速降线问题是意大利科学家伽利略在 1630 年提出的^[1], 被认为是变分法产生的源泉^[2]和最早的最优化问题^[3]。近来, 库仑摩擦轨道上的最速降线问题受到研究者的重视^[4-9]。文献[4]给出了库仑摩擦轨道上的最速降线问题分析解。一些文献用不同的方法研究了库仑摩擦轨道上的最速降线问题, 如文献[5-7]采用的是约束变分法, 文献[8]采用的是优化控制方法, 文献[9]采用的是数值计算方法。

本文根据变分法及其变量变换不变性的性质, 对比欧拉方程存在第一积分的情形, 确定最速降问题在不同空间中的可能极值函数, 以经典的无摩擦的最速降问题验证了采用轨道切线方向与 x 轴的夹角及其对时间的导数构造可能极值函数得到的最速降线与传统的变分法的结果一致。进而, 我们求得了库仑摩擦最速降线的解析表达式, 分析归纳了库仑摩擦最速降轨迹斜率的匀变性、尺度的相似性、轨迹函数依摩擦系数的分簇性和运动的临界性等基本性质。

1 变分法及其变量变换

形如 $J[y(x)] = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y') dx$ 的泛函在允许函数 $y(x)$ 的固定边界 $y_1 = y(x_1)$, $y_2 = y(x_2)$ 间是三阶可微的。根据变分原理可得泛函 $J[y(x)]$

$= \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y') dx$ 取极值的必要条件为

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 0 \quad (1)$$

式(1)称为欧拉方程。

欧拉方程存在第一积分的几种情形为:

① $F = F(x, y)$, 由欧拉方程得 $F_{y'} = 0$, 可解得 $y = y(x)$ 。如果此函数满足要求的边界条件, 它可能是极值函数; 如果此函数不满足要求的边界条件, 则极值函数不存在; ② $F = F(y, y')$, 这时欧拉方程有一次积分 $F - y' \frac{\partial F}{\partial y'} = c_1$; ③ $F = F(x, y')$, 这时

欧拉方程有一次积分 $\frac{\partial F}{\partial y'} = c_1$ 。

欧拉方程具有变量变换不变性^[11]。设变换公式为 $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, 则泛函变换成 $J[v(u)] = \int_{u_1}^{u_2} F_1(u, v, v') du$, 这时欧拉方程为 $\frac{\partial F_1}{\partial v} - \frac{d}{du} \left(\frac{\partial F_1}{\partial v'} \right) = 0$ 。

2 无摩擦最速降问题

无摩擦最速降问题表述为: 设 M 为位于 x 轴下方的不在 y 轴上的一点, 在所有连接坐标原点 O 和点 M 的光滑曲线中, 求一条曲线使得当质点在重力作用下无初速地沿此曲线由 O 滑到点 M

收稿日期: 2011-05-07

作者简介: 史友进(1960-), 男, 江苏海安人, 教授, 博士, 主要研究方向为动力学分析与控制、材料物理、非线性系统复杂性等。

所需的时间最短。

质点由点 O 滑到点 M 所需的时间为

$$t = \int_0^{s_M} \frac{ds}{v} \quad (2)$$

式中 s 为质点的运动路程, v 为质点的运动速率。分析式(2)可知它属于欧拉方程存在第一积分的情形①和情形②, 欲使 t 取极值, v 应取常量, 不能满足边界条件。

将 $ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$, $v^2 = -2gy$ 代入(2)式, 得

$$t = \int_0^{x_M} \frac{\sqrt{1+y'^2} dx}{\sqrt{-2gy}} \quad (3)$$

式中 g 为重力加速度, $y \leq 0$ 。分析式(2)可知它属于欧拉方程存在第一积分的情形②, 进行积分计算后得到最速降线为旋轮线^[10]。

我们现在关注的是, 如果用 θ 表示质点轨道曲线切线方向与 x 轴的夹角, θ 对时间的导数记为 ω , 那么质点由点 O 滑到点 M 所需的时间为

$$t = \int_{-\pi/2}^{\theta_M} \frac{d\theta}{\omega} \quad (4)$$

根据欧拉方程, 欲使 t 取极值, ω 应取常量。这样能否满足边界条件, 答案是肯定的。

由 $v^2 = -2gy$ 两边对时间 t 求导, 注意到 $\frac{dy}{dt} = v \sin \theta$, $\frac{dv}{dt} = v \frac{d\theta}{d\theta} \omega$, 得 $\int_0^{\theta} dv = \int_{-\pi/2}^{\theta} -\frac{g}{\omega} \sin \theta d\theta$, 即 $v = \frac{g}{\omega} \cos \theta$ 。利用轨道曲率半径 ρ 与 v 、 ω 间的关系 $\rho = \frac{v}{\omega}$, 可得 $x = \int_{-\pi/2}^{\theta} \rho \cos \theta d\theta = \frac{g}{4\omega^2} [\sin(2\theta) + 2\theta - \pi]$, $y = \int_{-\pi/2}^{\theta} \rho \sin \theta d\theta = \frac{g}{4\omega^2} [1 - \cos(2\theta)]$ 。由 $x = x_M, y = y_M$ 时, $\theta = \theta_M$, 可解得 θ_M 和 ω 。因此, 式(4)中取 ω 常量, 能够满足边界条件, 由 ω 取常量求得的速降线与前面的结果一致, 也为旋轮线。

式(2)、式(3)和式(4)选取的允许函数分别为 $v = v(s)$ 、 $y = y(x)$ 和 $\omega = \omega(\theta)$, 它们之间的关系是变量变换关系。由前面的讨论可见, 分别由式(3)和式(4)能够求得最速降线, 而由式(2)则不能够求得最速降线。比较式(2)和式(4)可知, 它们都是在相空间求解的, 式(2)采用的有量纲的相空间, 式(4)采用的无量纲的相空间。由式(4)能够求得最速降线给我们的启示是, 在无量纲的相空间得到的最速降线条件是 ω 为常量具有重要的和普遍的意义。经典最速降线的许多有

趣的性质也是起源于这一点。

3 库仑摩擦最速降问题

如图 1 所示, 质量为 m 的质点沿摩擦因素为 μ 的非光滑轨道自静止开始由坐标原点 O 滑至第 IV 象限的点 $F(x_F, y_F)$ 。在自然坐标系中, 其切向动力学方程为 $-mg \sin \theta - \mu N = m \frac{dv}{dt} = m \frac{dv}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = m \frac{dv}{d\theta} \omega$, 法向动力学方程为 $-mg \cos \theta + N = m \frac{v^2}{\rho} = m v \frac{d\theta}{dt}$, 消去 N 得

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = -g \frac{\sin \theta + \mu \cos \theta}{\frac{dv}{d\theta} + \mu v} \quad (5)$$

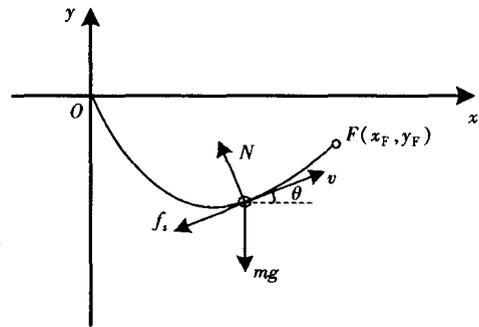


图 1 非光滑轨道上质点的运动和受力分析

Fig. 1 Force arct on a particee moving along a friction track

由前面的讨论可知, ω 取常量是最速降线的必要条件。因此,

$$\frac{dv}{d\theta} + \mu v = -\frac{g}{\omega} (\sin \theta + \mu \cos \theta) \quad (6)$$

解得

$$v = \frac{g}{\omega(1+\mu^2)} \left((1-\mu^2) \cos \theta - 2\mu (\sin \theta + e^{-\mu(\theta+\frac{\pi}{2})}) \right) \quad (7)$$

再由 $x = \int_{-\pi/2}^{\theta} \frac{v \cos \theta}{\omega} d\theta$ 和 $y = \int_{-\pi/2}^{\theta} \frac{v \sin \theta}{\omega} d\theta$ 求得库仑摩擦最速降轨迹方程为

$$x = \frac{g}{4\omega^2(1+\mu^2)^2} \left((1-\mu^4) (\sin(2\theta) + 2\theta) + 2\mu(1+\mu^2) \cos(2\theta) + 8\mu(\mu \cos \theta - \sin \theta) e^{-\mu(\theta+\frac{\pi}{2})} + (1-\mu^4) \pi + 2\mu^3 - 6\mu \right) \quad (8)$$

$$y = \frac{g}{4\omega^2(1+\mu^2)^2} \left((1-\mu^4) \cos(2\theta) + \right.$$

$$2\mu(1 + \mu^2)(\sin(2\theta) - 2\theta) + 8\mu(\cos \theta + \mu \sin \theta)e^{-\mu(\theta + \frac{\pi}{2})} - 2\mu(1 + \mu^2)\pi + \mu^4 + 8\mu^2 - 1) \quad (9)$$

由 $x = x_F, y = y_F, \theta = \theta_F$, 可解得 θ_F 和 ω 。

4 库仑摩擦最速降线的一些性质

由上述计算结果可以归纳出,库仑摩擦最速降轨迹曲线具有如下性质:

轨迹斜率的匀变性。库仑摩擦最速降线切线方向与 x 轴的夹角对时间的导数为常数,此常数与摩擦系数 μ 无关,仅依赖于轨迹的空间尺度,这就是库仑摩擦最速降轨迹斜率的匀变性。它是确定库仑摩擦最速降轨迹函数簇的必要条件。

轨迹尺度的相似性。由式(8)和式(9)可见,库仑摩擦最速降曲线轨迹上质点坐标比值(y/x)只与速度倾角 θ 、摩擦系数 μ ,与空间尺度无关,这与直线轨迹决定的空间上的相似三角形类似,这就是空间上的相似性。利用库仑摩擦最速降线轨迹尺度的相似性,在计算时先由 $\frac{y_F}{x_F} = \frac{y(\theta_F)}{x(\theta_F)}$ 求得

θ_F ,再由 $\omega = \sqrt{\frac{x_1(\theta_F)}{x_F}}$ 求得 ω (其中 $x_1(\theta_F)$ 是 $\omega = 1$ 时的 x_F 值)。

轨迹函数依摩擦系数的分簇性。由于不同轨道的摩擦系数可能不同,这导致式(8)和式(9)决定的轨迹形状上的差异。图2是不同 μ 值的最速降线。图2a中的曲线由上而下是摩擦系数 μ 依次为 0, 0.1, ..., 1, 取 $g = 1, x_F = \pi/4, v_F = v_0 = 0$ 时计算得到的最速降曲线。由图可见,不同摩擦系数的最速降曲线具有不同的特征:当 $\mu = 0$ 时最速降曲线是左右对称的轮摆线;当 $\mu \neq 0$ 时最速降曲线的 y_F 随 μ 增大而减小。图2b中的曲线由上而下是摩擦系数 μ 依次为 0, 0.1, ..., 0.4, 取 $g = 1, x_F = \pi/4, y_F = -0.5$ 时计算得到的最速降曲线。 $\mu \neq 0$ 时与 $\mu = 0$ 时的最速降曲线比较,开始阶段前者轨迹较陡有利于运动速率的迅速提高,中间阶段前者轨迹较平直有利于减小摩擦力做功,最后阶段前者轨迹较弯但由于速率较小从而使摩擦力做功影响较小。

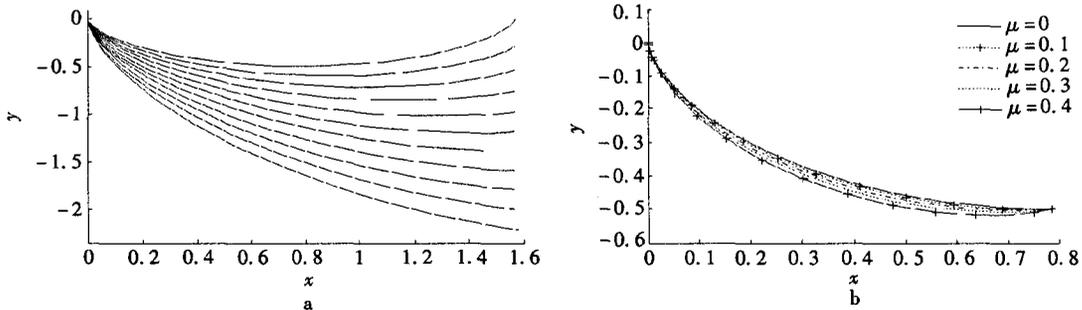


图2 不同 μ 值的最速降线
Fig. 2 Brachistochrone curve with different μ value

最速降运动的临界性。由式(7)可见,库仑摩擦最速降轨迹上质点运动的末速率为零时最速降线切线方向与 x 轴的夹角 θ_F 只与摩擦系数 μ 有关,与空间尺度无关。图3是不同 μ 值的最速降线上 $v_F = 0$ 时的主要参数 $\theta_F, y_F/x_F$ 和 $r_{1,F} = \sqrt{x_1^2(\theta_F) + y_1^2(\theta_F)}$ 随摩擦系数 μ 的变化规律。由图可见,这些参数随摩擦系数 μ 的增大而减小,其中 y_F/x_F 随摩擦系数 μ 的变化规律是近似线性的。

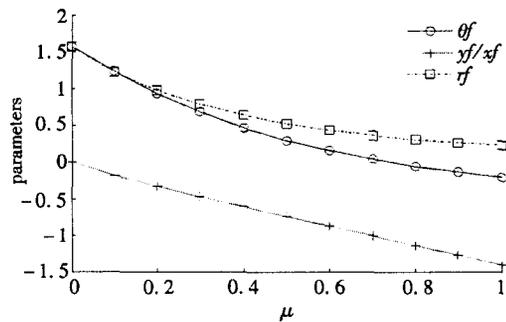


图3 库仑摩擦最速降运动的临界性
Fig. 3 Criticality of brachistochron with Coulomb friction

参考文献:

- [1] Bernoulli J. Jacobi Bernoulli solutio problematum fraterorum[J]. Acta Eruditorum, Leipzig, May, 1697:214.
- [2] Gelfand I M, Fomin S V. Calculus of Variations[M]. Prentice - Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1963.
- [3] Charlton W, Chiarella C, Roberts A W. Gravity flow of granular materials in chutes; optimizing flow properties[J]. J. Agr. Eng. Res, 1975, 20:39 - 45.
- [4] Ashby N, Brittin W E, Love W F, et al. Brachistochrone with Coulomb friction[J]. Amer. J. Phys, 1975, 43(10):902 - 906.
- [5] Slaviša Šlinić. Contribution to the brachistochrone problem with Coulomb friction[J]. Acta Mech, 2009, 208:97 - 115.
- [6] Hayen J C. Brachistochrone with Coulomb friction[J]. Int. J. Nonlin. Mech, 2005, 40(8):1 057 - 1 075.
- [7] Vander Heijden A M A, Diepstraten J D. On the brachistochrone with dry friction[J]. Int. J. Nonlinear Mech, 1975, 10:97 - 112.
- [8] Lipp S C. Brachistochrone with Coulomb friction[J]. SIAM J. Control Optim, 1997, 35(2):562 - 584.
- [9] Wensrich C M. Evolutionary solutions to the brachistochrone problem with Coulomb friction[J]. Mech. Res. Commun, 2004, 31:151 - 159.
- [10] 欧斐君, 梁建华. 变分法及其应用[M]. 西安:西安出版社, 1987:30 - 32.

On Brachistochrone with Coulomb Friction

SHI You-jin, YU Xiao-ming

(Department of Fundamental Science Teaching, Yancheng Institute of Technology, Yancheng Jiangsu 224051, China)

Abstract: Brachistochrone problem with Coulomb friction is a subject arising concerns of many researchers. Based on the variational method and the variable transformation invariance, we find the possible extremal function formed by slope angle of the tangent can meet the endpoint conditions and be verified by the classic brachistochrone problem. The analytical expression of the brachistochrone with Coulomb friction is obtained and the properties such as uniform trajectory slope, similar in scale, sub-cluster with the trajectory function of the friction coefficient and critical of the movement of brachistochrone with Coulomb friction are summarized.

Keywords: Calculus of variations; variable transformation invariance; Brachistochrone; Coulomb friction; Criticality

(责任编辑:张英健)