关于四元数矩阵特征值的两个估计定理

周长华,郑毓明
(盐城生物工程高等学校 教学评估处,江苏 盐城 224051)

摘要:在复数域上,复矩阵的特征值有着许多重要的估计方法,它能很好地表达复矩阵的特征值的分布情况。由于四元数矩阵乘积的非交换性,使得四元数矩阵与复矩阵特征值存在较大差异。利用容易刻画的有界集来估计一个四元数矩阵的特征值,给出了四元数矩阵特征值估计的两个定理。

关键词:四元数矩阵;特征值;估计
中图分类号:O151.21 **文献标识码**:A **文章编号**:1671-5322(2012)03-0029-02

1 引言与符号约定

随着四元数矩阵方法在刚体动力学、陀螺使用理论、惯性导航、机器与机构、机器人技术、人造卫星姿态控制等领域的广泛应用,人们对四元数矩阵代数问题的研究不断深入,关于四元数矩阵特征值估计问题也引起人们的广泛兴趣。

四元数矩阵乘积的非交换性使得四元数矩阵的特征值与复矩阵特征值存在较大差异,从而导致四元数矩阵特征值的估计问题变得十分困难。本文利用容易刻画的有界集来估计一个四元数矩阵的特征值,给出四元数矩阵特征值估计定理。

文中,R 为实数域,Q 为实四元数体,$Q^{m\times n}$ 为 $m\times n$ 阶四元数矩阵的全体,$Q^{n\times n}$ 为实四元数体 Q 上 n 阶矩阵的集合,Q^n 为 Q 上 n 维右列空间,对 $x=a+bi+cj+dk\in Q(a,b,c,d,\in R)$,$x$ 的模值 $|x|=\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}$。

2 基本概念

定义 1[1] 设 Q 是一个实四元数体,矩阵 $A\in Q^{n\times n}$,如果存在四元数 $0\neq a\in Q$ 和 n 维非零四元数列向量 α,使得 $A\alpha=\alpha\cdot a$,称 α 是矩阵 A 的一个右特征值,α 为矩阵 A 的对应于右特征值 a 的右特征向量;如果存在四元数 $0\neq b\in Q$ 与 n 维非零四元数列向量 β,使得 $A\beta=b\cdot\beta$,称 b 是矩阵 A 的一个左特征值,β 为矩阵 A 的对应于左特征值 b 的左特征向量。

四元数矩阵 A 的右特征值不一定是其左特征值;反之,四元数矩阵 A 的左特征值也不一定为其右特征值。如取矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & -k\\ k & 1\end{pmatrix}$,则 $1+i$ 是矩阵 A 的一个左特征值,但不是矩阵 A 的右特征值。

定义 2[2] 设矩阵 $A\in Q^{n\times n}$,则称矩阵 $A\in Q^{n\times n}$ 的导出阵 $A^\sigma\in C^{2n\times 2n}$ 的特征多项式 $|\lambda I_{2n}-A^\sigma|$ 为矩阵 A 的拟特征多项式。记为 $F_A^\sigma(\lambda)$,即 $F_A^\sigma(\lambda)=|\lambda I_{2n}-A^\sigma|$

定义 3 设 a 是一个已知的四元数,$r\in R^+$ 对于任意四元数 $z\in Q$,若满足 $|z-a|\leqslant r$,则称 $\Omega=\{z\,\|\,z-a|\leqslant r\}$ 是以四元数 a 为中心,实数 r 为半径的广义球。

定义 4[1] 设矩阵 $A,B\in Q^{n\times n}$,若存在可逆矩阵 $P\in Q^{n\times n}$,使得 $B=P^{-1}AP$ 则称矩阵 A 与矩阵 B 是相似矩阵,记为 A□B。

3 主要结果

定理 1 设矩阵 $A,B\in Q^{n\times n}$,若矩阵 A 与矩阵 B 为相似矩阵,则矩阵 A 与矩阵 B 有相同的拟特征多项式。

证明:由于矩阵 $A,B\in Q^{n\times n}$ 是相似矩阵,即存在可逆矩阵 $P\in Q^{n\times n}$,使得

$$P^{-1}AP=B$$

收稿日期:2012-07-17
作者简介:周长华(1975-),男,江苏盐城人,讲师,硕士,主要研究方向为矩阵论。

根据相似矩阵的性质和四元数矩阵导出阵的性质,有

$$(P^{\sigma})^{-1}A^{\sigma}P^{\sigma} = B^{\sigma}$$

根据复数域 C 上的矩阵理论可以推出,矩阵 A^{σ} 与 B^{σ} 为相似矩阵,从而有相同的特征多项式,即矩阵 A 与矩阵 B 有相同的拟特征多项式。

在复数域 C 上,矩阵的特征值有着许多重要的估计方法,如著名的 Gerschorin 定理,很好地刻画了复矩阵特征值的分布情况。在四元数体上,由于四元数矩阵乘积的非交换性,我们是否也能够找到一个有界集来估计四元数矩阵的特征值呢?

定理2 设矩阵 $A=(a_{ij})\in Q^{n\times n}$,定义盖尔球

$$G_i(A) = \left\{z: | z - a_{ii} | \leqslant \sum_{j=1,j\neq i} | a_{ii} | \right\},\quad i = 1,2,\cdots,n \tag{1}$$

记 n 个盖尔球之并为 $G(A)=\bigcup_{i=1}^{n} G_i(A)$

则矩阵 A 的所有左特征值包含均在 $G(A)$ 之中,或者说矩阵 A 的每个左特征值必含在(1)的一个盖尔球之中。

证明: 设 λ 是矩阵 A 的一个左特征值,$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$ 是对应特征值 λ 的相应特征向量。即 $Ax=\lambda x$,我们取 $|x_p|=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}|x_i|$

则有 $Ax=\lambda x$ 的第 p 个方程可以写成

$$\sum_{j=1,j\neq p}^{n} a_{pj}x_j + a_{pp}x_p = \lambda x_p$$

等式两端同时右乘 x_p^{-1},得第 p 个方程为

$$\lambda - a_{pp} = \sum_{j=1,j\neq p}^{n} a_{pj}x_j x_p^{-1}$$

从而

$$| \lambda - a_{pp} | \leqslant \sum_{j=1,j\neq p}^{n} | a_{pj} || x_j || x_p^{-1} | = \sum_{j=1,j\neq p}^{n} | a_{pj} | \frac{| x_j |}{| x_p |} \leqslant \sum_{j=1,j\neq p}^{n} | a_{pj} |$$

则有 $\lambda\in G_p(A)\subset G(A)$

由于四元数矩阵乘积的非交换性,定理2的结果不能简单地推广到四元数矩阵右特征值的情形,这正是四元数矩阵与复矩阵的区别。在定理3中,我们将可以找到一个非零四元数 α 和一个有界集,以此来估计四元数矩阵的右特征值。

定理3 设矩阵 $A=(a_{ij})\in Q^{n\times n}$,定义盖尔球

$$G_i(A) = \left\{z: | z - a_{ii} | \leqslant \sum_{j=1,j\neq i} | a_{ij} | \right\},\quad i = 1,2,\cdots,n$$

记 n 个盖尔球之并为 $G(A)=\bigcup_{i=1}^{n} G_i(A)$,则对矩阵 A 的所有右特征值 λ 都可以找到一个非零数 α,使得 $\alpha\lambda\alpha^{-1}$ 包含在 $G(A)$ 之中。

证明: 设四元数 λ 是矩阵 A 的一个右特征值,$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$ 是对应四元数 λ 的右特征向量。即 $Ax=x\lambda$,我们取 $|x_p|=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}|x_i|$

从而 $Ax=x\lambda$ 的第 p 个方程可以写成

$$\sum_{j=1,j\neq p}^{n} a_{pj}x_j + a_{pp}x_p = x_p\lambda$$

等式两端同时右乘 x_p^{-1},得

$$\sum_{j=1,j\neq p}^{n} a_{pj}x_j x_p^{-1} + a_{pp}x_p x_p^{-1} = x_p\lambda x_p^{-1}$$

从而

$$x_p\lambda x_p^{-1} - a_{pp} = \sum_{j=1,j\neq p}^{n} a_{pj}x_j x_p^{-1}$$

则

$$| x_p\lambda x_p^{-1} - a_{pp} | \leqslant \sum_{j=1,j\neq p}^{n} | a_{pj} || x_j || x_p^{-1} | = \sum_{j=1,j\neq p}^{n} | a_{pj} | \frac{| x_j |}{| x_p |} \leqslant \sum_{j=1,j\neq p}^{n} | a_{pj} |$$

即

$$x_p\lambda x_p^{-1} \in G_p(A) \subset G(A)$$

在这里非零四元数 $\alpha=x_p$,从而 $\alpha\lambda\alpha^{-1}\in G_p(A)\subset G(A)$。

参考文献:

[1] 刘裔宏. 关于广义特征值估计的一个 Gerschgorin 型定理[J]. 工科数学,1994(10):49-51.
[2] 黄礼平. 四元数矩阵的特征值与奇异值估计[J]. 数学研究与评论,1992,12:449-454.
[3] 庄瓦金. 体上矩阵理论导引[M]. 北京:科学出版社,2006.
[4] 陈龙玄. 四元数矩阵的特征值和特征向量[J]. 烟台大学学报:自然科学与工程版,1998(2):1-8.
[5] 佟文廷. 矩阵张量积的圆盘理论[J]. 南京大学学报,1980(Z1):92-107.
[6] 李文亮. 四元数矩阵[M]. 长沙:国防科技大学出版社,2002.
[7] 庄瓦金. 四元数矩阵的特征值与奇异值不等式[J]. 自然杂志,1989(4):1-5.

(下转第33页)

参考文献:

[1] 庄瓦金. 体上矩阵理论导引[M]. 北京:科学出版社,2006.

[2] 李文亮. 四元数矩阵[M]. 长沙:国防科技大学出版社,2002.

[3] 屠伯埙. 四元数体上矩阵的弱直积与弱圈积[J]. 复旦大学学报:自然科学版,1991(3):331-339.

[4] 伍俊良. 四元数体上矩阵的弱直积与弱圈积德特征值和奇异值不等式[J]. 重庆师范学院学报:自然科学版,1994(12):60-65.

[5] 杨忠鹏. 四元数矩阵乘积的奇异值与特征值不等式[J]. 数学研究与评论,1992(12):617-622.

[6] 屠伯埙. 四元数体上自共轭阵的中心化基本定理及其应用[J]. 数学杂志,1988(8):143-150.

The Two Property Theorem of Eigenvalue on Self - conjugate Quaternion Matrix

ZHANG De-jiang

(Department of Electronic Engineering, Yancheng Higher Vocational School of Biological Engineering, Yancheng Jiangsu 224051, China)

Abstract: Eigenvalue theory, an important part of the matrix theory, has a wide range of applications in the natural sciences and engineering. Due to the the quaternion product non - exchangeable, there are many difficulties in this research. According to the property of self - conjugate quaternion matrix, this paper combines the definition of quaternion matrix direct product, and gives two property theorems of the self - conjugate quaternion matrix.

Keywords: self - conjugate quaternion matrix; eigenvalue; direct product

(责任编辑:张英健)

(上接第30页)

The Two Estimated Theorem of Eigenvalue on Quaternion Matrix

ZHOU Chang-hua, ZHEN Yu-ming

(Teaching Evaluation Department, Yancheng Higher Vocational School of Biological Engineering, Yancheng Jiangsu 224051, China)

Abstract: In the complex field, there are many methods to estimate the characteristies of complex matrix. They can well express the distribution of complex matrix eigen value. That quaternion multiplication does not satisfy the commutative make difference between the quaternion matrix eigenvalue and complex matrix eigenvalue.

Keywords: the quaternion matrix; eigenvalue; estimated

(责任编辑:张英健)