第25卷 第3期 盐城工学院学报(自然科学版) Vol. 25 No. 3
2012年09月 Journal of Yancheng Institute of Technology(Natural Science Edition) Sep. 2012

# 关于自共轭四元数矩阵特征值的两个性质定理

张德江
(盐城生物工程高等学校 电子工程系,江苏 盐城 224051)

**摘要**:特征值理论是矩阵理论的重要组成部分,在自然科学和工程技术中有着广泛的应用。由于四元数乘积的非交换性,使这一理论的研究困难重重。根据四元数体上自共轭矩阵的性质,并结合四元数矩阵直积的定义,给出四元数体上自共轭矩阵的两个性质定理。

**关键词**:自共轭四元数矩阵;特征值;直积
**中图分类号**:O151.21 **文献标识码**:A **文章编号**:1671-5322(2012)03-0031-03

## 1 引言与符号约定

特征值理论是矩阵理论的重要组成部分,也是当前迅速发展的计算机科学中一个活跃的研究课题,在自然科学和工程技术中有着广泛的应用。但对于四元数体上矩阵,由于四元数乘积的非交换性,使这一理论的研究困难重重。本文根据实四元数体上自共轭矩阵的性质,并结合四元数矩阵直积的定义,给出四元数体上自共轭矩阵的两个性质定理。

文中,$R$ 为实数域,$Q$ 为实四元数体,$Q^{n\times n}$ 为 $m\times n$ 阶四元数矩阵的全体,$Q^{n\times n}$ 为实四元数体 $Q$ 上 $n$ 阶矩阵的集合,$SC_n(Q)$ 为自共轭四元数矩阵全体,$Q^n$ 为 $Q$ 上 $n$ 维右列空间,用 $A^* = \overline{A'}$ 为 $A$ 的共轭转置。

## 2 基本概念及引理

**定义1** 设矩阵 $A\in Q^{n\times n}$,如果 $A^* = A$,则称矩阵 $A$ 为四元数自共轭矩阵;如果 $A^* = -A$,则称矩阵 $A$ 为四元数斜自共轭矩阵。

**定义2** 设矩阵 $A\in Q^{n\times n}$,如果 $A^*A = AA^*$,则称矩阵 $A$ 为四元数正规矩阵。

**定义3** 设矩阵 $A\in Q^{n\times n}$,如果 $A^*A = AA^* = I_n$,则称矩阵 $A$ 为四元数酉矩阵。

**定义4** 设矩阵 $A,B\in Q^{n\times n}$,如果存在酉矩阵 $U\in U^{n\times n}$,使得 $B = U^{-1}AU$,则称矩阵 $A$ 与矩阵 $B$ 是酉相似。

**定义5** 设矩阵 $A = (a_{ij})_{m\times n}$ 与矩阵 $B = (b_{ij})_{p\times q}$ 是 $Q$ 上矩阵,称 $Q$ 上 $mp\times nq$ 矩阵

$$\begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \cdots & a_{2n}B \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \cdots & a_{mn}B \end{pmatrix}$$

为矩阵 $A$ 与矩阵 $B$ 的直积,记为 $A\otimes B$。当矩阵 $B\in R^{p\times q}$ 时,称 $A\otimes B$ 为弱右直积;当矩阵 $A\in R^{m\times n}$ 时,称 $A\otimes B$ 为弱左直积,两者统称为弱直积

**引理1** 设矩阵 $A\in SC_n(Q)$,则存在酉矩阵 $U\in U^{n\times n}$,使得

$$U^*AU = diag(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n),$$
$$\text{其中 } \lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n \in R$$

**引理2** 设矩阵 $A = (a_{ij})\in Q^{m\times n}$,则矩阵 $A$ 为正规矩阵的充分必要条件是矩阵 $A$ 酉相似于对角阵,即存在酉矩阵 $U\in U^{n\times n}$,使得

$$U^*AU = diag(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$$

其中 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\in C$,且为矩阵 $A$ 的 $n$ 个右特征值。

**引理3** 四元数矩阵的直积满足如下性质:

(1)当矩阵 $B,C$ 中有一个为 $R$ 上矩阵时,有 $(A\otimes B)(C\otimes D) = (AC)\otimes(BD)$

(2)当矩阵 $A,B$ 中有一个是 $R$ 上矩阵时,则 $(A\otimes B)^* = A^*\otimes B^*$

**收稿日期**:2012-08-17
**作者简介**:张德江(1966-),男,江苏盐城人,讲师,硕士,主要研究方向为导数与积分。

## 3　主要结果

**定理1**　设矩阵 $A\in Q^{n\times n}$ 为四元数自共轭矩阵,其特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$,矩阵 $B\in R^{n\times n}$ 为实对称矩阵,其特征值为 $\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n$,则矩阵 $A\otimes B$ 的全体特征值为 $\lambda_i\mu_j,(i,j=1,2,\cdots,n)$

**证明**:因为矩阵 $A\in Q^{n\times n}$ 为四元数自共轭矩阵,其特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$,所以存在四元数酉矩阵 $U_1$,使得

$$U_1^*AU_1=\begin{pmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{pmatrix}=\wedge_1$$

又因为矩阵 $B\in Q^{n\times n}$ 为实对称矩阵,其特征值为 $\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n$,所以存在实酉矩阵 $U_2$,使得

$$U_2^*BU_B=\begin{pmatrix}\mu_1&&&\\&\mu_2&&\\&&\ddots&\\&&&\mu_n\end{pmatrix}=\wedge_2,$$

$$\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n\in R$$

根据引理3,于是有

$$(U_1\otimes U_2)^*(A\otimes B)(U_1\otimes U_2)=$$
$$(U_1^*AU_1)(U_2^*BU_2)=$$
$$\begin{pmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}\mu_1&&&\\&\mu_2&&\\&&\ddots&\\&&&\mu_n\end{pmatrix}=$$

$\wedge_1\otimes\wedge_2$,易知,矩阵 $\wedge_1\otimes\wedge_2$ 为对角矩阵,而矩阵 $A\otimes B$ 酉相似于矩阵 $\wedge_1\otimes\wedge_2$,故矩阵 $A\otimes B$ 的全体特征值为 $\wedge_1\otimes\wedge_2$ 对角线元素,即 $\lambda_i\mu j,(i,j=1,2,\cdots,n)$。

**定理2**　设矩阵 $A\in Q^{n\times n}$ 为四元数自共轭矩阵,则有 $A=\lambda_1P_1+\lambda_2P_2+\cdots+\lambda_nP_n,\lambda_i\in R$ 为 $A$ 的 $n$ 个特征值,矩阵 $P_j\in Q^{n\times n}$,且

(1)矩阵 $P_j\in Q^{n\times n}$ 是四元数自共轭矩阵,$P_i^*=P_i,i=1,2,\cdots,n$

(2)矩阵 $P_j\in Q^{n\times n}$ 是幂等阵,$P_i^2=P_i,i=1,2,\cdots,n$

(3)$P_iP_j=0,i\neq j$

**证明**:因为矩阵 $A\in Q^{n\times n}$ 为四元数自共轭矩阵,则存在酉矩阵 $U\in U^{n\times n}$,使得

$$U^*AU=\begin{pmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{pmatrix},$$

$$\lambda_i\in R,i=1,2,\cdots n$$

即

$$A=U\begin{pmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{pmatrix}U^*,$$

$$\lambda_i\in R,i=1,2,\cdots n$$

令

$$U=(u_1,u_2,\cdots,u_n)$$

其中 $u_i\in Q^n,i=1,2,\cdots n$,则

由于 $\lambda_i\in R,i=1,2,\cdots n$ 可交换,所以

$$A=\lambda_1u_1u_1^*+\lambda_2u_2u_2^*+\cdots+\lambda_nu_nu_n^*$$

令 $P_i=u_iu_i^*$,则得

$$A=\lambda_1P_1+\lambda_2P_2+\cdots+\lambda_nP_n,\lambda_i\in R$$

(1)由于 $P_i=u_iu_i^*$,则 $P_i^*=(u_iu_i^*)^*=u_iu_i^*=P_i$,所以 $P_j\in Q^{n\times n}$ 是四元数自共轭矩阵。

(2)由于 $P_i=\lambda_iu_iu_i^*$,则 $(P_i)^2=(u_iu_i^*)^2=u_iu_i^*u_iu_i^*=u_i(u_iu_i^*)u_i^*=u_iu_i^*=P_i$

(3)根据四元数酉矩阵的性质,很容易得到 $P_iP_j=0,i\neq j$

通过引理2并结合定理2的证明过程,可以发现,若是将矩阵 $A\in Q^{n\times n}$ 为四元数自共轭矩阵放宽条件为四元数正规矩阵,定理2的结论显然不成立,这是因为将矩阵

$A=U\begin{pmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{pmatrix}U^*$ 展开时,$\lambda_i\in C,i=1,2,\cdots n$,乘法交换率不成立。

**参考文献:**

[1] 庄瓦金. 体上矩阵理论导引[M]. 北京:科学出版社,2006.

[2] 李文亮. 四元数矩阵[M]. 长沙:国防科技大学出版社,2002.

[3] 屠伯埙. 四元数体上矩阵的弱直积与弱圈积[J]. 复旦大学学报:自然科学版,1991(3):331-339.

[4] 伍俊良. 四元数体上矩阵的弱直积与弱圈积德特征值和奇异值不等式[J]. 重庆师范学院学报:自然科学版,1994(12):60-65.

[5] 杨忠鹏. 四元数矩阵乘积的奇异值与特征值不等式[J]. 数学研究与评论,1992(12):617-622.

[6] 屠伯埙. 四元数体上自共轭阵的中心化基本定理及其应用[J]. 数学杂志,1988(8):143-150.

# The Two Property Theorem of Eigenvalue on Self-conjugate Quaternion Matrix

ZHANG De-jiang

(Department of Electronic Engineering, Yancheng Higher Vocational School of Biological Engineering, Yancheng Jiangsu 224051, China)

**Abstract**: Eigenvalue theory, an important part of the matrix theory, has a wide range of applications in the natural sciences and engineering. Due to the the quaternion product non-exchangeable, there are many difficulties in this research. According to the property of self-conjugate quaternion matrix, this paper combines the definition of quaternion matrix direct product, and gives two property theorems of the self-conjugate quaternion matrix.

**Keywords**: self-conjugate quaternion matrix; eigenvalue; direct product

(责任编辑:张英健)

(上接第30页)

# The Two Estimated Theorem of Eigenvalue on Quaternion Matrix

ZHOU Chang-hua, ZHEN Yu-ming

(Teaching Evaluation Department, Yancheng Higher Vocational School of Biological Engineering, Yancheng Jiangsu 224051, China)

**Abstract**: In the complex field, there are many methods to estimate the characteristies of complex matrix. They can well express the distribution of complex matrix eigen value. That quaternion multiplication does not satisfy the commutative make difference between the quaternion matrix eigenvalue and complex matrix eigenvalue.

**Keywords**: the quaternion matrix; eigenvalue; estimated

(责任编辑:张英健)