

四元数体上矩阵广义特征值的性质

陆媛

(盐城工学院 基础部, 江苏 盐城 224051)

摘要:四元数矩阵特征值研究无论在理论上还是在应用上都有极其重要的意义,它是四元数体上矩阵理论的重要内容。就四元数矩阵广义特征值的性质进行研究,有些结论是实(复)数域上广义特征值理论的推广和延伸。

关键词:四元数体;广义特征值;性质

中图分类号:O151.21 **文献标识码:**A **文章编号:**1671-5322(2012)04-0074-03

1 引言与符号约定

四元数矩阵特征值研究无论在理论上还是在应用上都有极其重要的意义,它是四元数矩阵理论的重要内容。随着现代科学技术的发展,微分方程定性理论、数学物理方程、统计分析和自动控制等方面的许多问题归结为广义特征值问题的研究,而目前关于广义特征值的文献也仅仅限于实(复)数域,而对于四元数体上矩阵广义特征值还少有文献研究。本文就四元数矩阵广义特征值的性质进行研究,有些结论是实(复)数域上广义特征值理论的推广延伸。

文中,用 R 表示实数域,用 Q 表示实四元数体,用 $Q^{m \times n}$ 表示 $m \times n$ 阶四元数矩阵的全体,用 $Q^{n \times n}$ 表示实四元数体上 n 阶矩阵的集合,用 Q^n 表示四元数体上 n 维右列空间,用 $A^* = \overline{A'}$ 表示矩阵 A 的共轭转置。

2 基本概念

定义1 设矩阵 $A, B \in Q^{n \times n}$,将它们组成的矩阵束记作 (A, B) 。如果存在四元数 $0 \neq \lambda \in Q$ 与 n 维非零列向量 α ,使得 $A\alpha = B\alpha\lambda$,称 λ 是矩阵 A 相对于矩阵 B 的一个广义右特征值, α 为矩阵 A 与矩阵 B 的对应于广义右特征值 λ 的广义右特征向量;如果存在四元数 $0 \neq \lambda \in Q$ 与 n 维非零列向量 α ,使得 $A\alpha = \lambda B\alpha$,称 λ 是矩阵 A 相对于矩阵 B 的一个广义左特征值, α 为矩阵 A 与矩阵 B 的对

应于广义左特征值 λ 的广义左特征向量。

四元数矩阵特征值问题是当矩阵束取作 (A, I) 时广义特征值问题的一个特例。四元数矩阵束 (A, B) 的广义右特征值不一定是广义左特征值;反之,广义左特征值也不一定为广义右特征值。

定义2 若矩阵 A 为 $Q^{n \times n}$ 上的四元数自共轭矩阵,且矩阵 B 为四元数自共轭正定矩阵,称 (A, B) 为四元数正则矩阵束。

定义3 设 (A, B) 为四元数正则矩阵束, $0 \neq x \in Q^n$ 为维列向量,称实数

$$R(x) = \frac{x^* A x}{x^* B x}$$

为四元数矩阵正则矩阵束 (A, B) 的广义瑞利商。

引理1 设矩阵 A 为 $Q^{n \times n}$ 上的自共轭矩阵,且矩阵 B 为四元数自共轭正定矩阵,则有可逆矩阵 $P \in Q^{n \times n}$,使得

$$P^* A P = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}, \lambda_i \in R, i = 1, 2, \dots, n$$
$$P^* B P = I_n$$

证明:由矩阵 B 是四元数自共轭正定矩阵,则存在可逆矩阵 $P_0 \in Q^{n \times n}$ 使得 $P_0^* B P_0 = I_n$,又因为 A 为四元数自共轭矩阵知, $P_0^* A P_0$ 仍为四元数自共轭矩阵,于是存在酉矩阵 $U \in U^{n \times n}$,使得

收稿日期:2012-09-29

作者简介:陆媛(1976-),女,江苏滨海人,讲师,硕士,主要研究方向为矩阵理论及计算数学。

$$U^* P_0^* A P_0 U = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

$$\lambda_i \in R, i = 1, 2, \dots, n$$

令矩阵 $P = P_0 U$, 则矩阵 P 可逆, 且

$$P^* A P = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

$$\lambda_i \in R, i = 1, 2, \dots, n$$

$$P^* B P = (P_0 U)^* B (P_0 U) = U^* P_0^* B P_0 U = U^* I_n U = I_n$$

3 主要结果

定理 1 关于四元数矩阵束 (A, B) 的广义特征值问题 $A\alpha = B\alpha\lambda$ (或 $A\alpha = \lambda B\alpha$) 具有如下性质:

(1) 若四元数矩阵 A 和矩阵 B 互换, 则广义右 (或左) 特征值将变为其倒数, 但广义右 (或左) 特征向量保持不变, 即有

$$A\alpha = B\alpha\lambda \Rightarrow B\alpha = A\alpha\lambda^{-1}$$

$$(\text{或 } A\alpha = \lambda B\alpha \Rightarrow B\alpha = \lambda^{-1} A\alpha)$$

(2) 若四元数矩阵 B 非奇异, 则广义右特征值可转化为右特征值; 但广义左特征值的情况不成立。

定理 2 四元数正则矩阵束的广义右特征值全为实数。

证明: 设 (A, B) 是四元数正则矩阵束, x 是四元数正则矩阵束 (A, B) 的属于广义右特征值 λ 的广义右特征向量, 即 $Ax = Bx\lambda$ 。

因为 B 为四元数自共轭正定矩阵, 则存在酉矩阵 P , 使得 $P^* B P = I$, 从而 $P^* A P P^{-1} x = P^* B P P^{-1} x \lambda$, 得 $(P^* A P)(P^{-1} x) = (P^* B P)(P^{-1} x) \lambda = (P^{-1} x) \lambda$, 即 λ 为 $P^* A P$ 的右特征值, $P^{-1} x$ 是 $P^* A P$ 的属于 λ 的右特征向量。由于 A 是自共轭四元数矩阵, P 是酉矩阵, 则 $P^* A P$ 也是自共轭四元数矩阵。自共轭四元数矩阵的特征值均为实

数, 所以 λ 为实数。

定理 3 设矩阵 A 为 $Q^{n \times n}$ 上的四元数斜自共轭矩阵, 矩阵 B 为 $Q^{n \times n}$ 上的四元数自共轭正定矩阵, 则矩阵束 (A, B) 的广义右特征值只能是 0 或纯虚数。

证明: 设 λ 为四元数矩阵束 (A, B) 广义右特征值, 向量 x 为对应的广义右特征向量, 即:

$$Ax = Bx\lambda \quad (1)$$

两端同时取共轭转置, 有

$$-x^* A = \bar{\lambda} x^* B \quad (2)$$

对 (1) 两边同左乘 x^* , 有

$$x^* A x = x^* B x \lambda \quad (3)$$

对 (2) 两边同右乘 x , 有

$$-x^* A x = \bar{\lambda} x^* B x \quad (4)$$

(3) 与 (4) 相加, 有

$$x^* B x \lambda + \bar{\lambda} x^* B x = 0 \quad (5)$$

又因为矩阵 B 为 $Q^{n \times n}$ 上的四元数自共轭正定矩阵, 所以 $x^* B x$ 为正实数, 从而 $\lambda + \bar{\lambda} = 0$, 即 A 的广义右特征值只能是 0 或纯虚数。

定理 4 设 (A, B) 为四元数正则矩阵束, $R(x)$ 为 $Q^{n \times n}$ 四元数正则矩阵束 (A, B) 的广义瑞利商, 广义特征值按递增顺序排列为 $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$, 则有 $\lambda_1 \leq R(x) \leq \lambda_n$ 。

证明: 因为 (A, B) 为四元数正则矩阵束, 即矩阵 A 为 $Q^{n \times n}$ 上的自共轭矩阵, 且矩阵 B 为四元数自共轭正定矩阵, 由引理 1, 则有可逆矩阵 $P \in Q^{n \times n}$, 使得

$$P^* A P = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} = \Lambda, \lambda_i \in R, i = 1, 2, \dots, n$$

$$P^* B P = I$$

令 $x = P y$, 则

$$R(x) = \frac{(P y)^* A (P y)}{(P y)^* B (P y)} = \frac{y^* P^* A P y}{y^* P^* B P y} = \frac{y^* \Lambda y}{y^* y}$$

故对任意的 y 和四元数矩阵瑞利商的性质, 有

$$\lambda_1 \leq \frac{y^* \Lambda y}{y^* y} \leq \lambda_n, \text{ 即 } \lambda_1 \leq R(x) \leq \lambda_n$$

参考文献:

- [1] 邓勇, 黄敬频, 杜刚. 四元数矩阵及其线性方程的解[J]. 纯粹数学与应用数学, 2010(2): 191 - 193.
- [2] 郎方年, 周激流, 闫斌, 等. 四元数矩阵正交特征向量系的求解方法及其在彩色人脸识别中的应用[J]. 自动化学报, 2011(1): 105 - 110.

2008(2):121-129.

- [3] 凌思涛,程学汉,魏木生.一般线性四元数矩阵方程的 Hermite 解[J].山东大学学报:理学版,2008(12):1-4.
[4] 郑福.四元数矩阵实表示的基本性质及应用[J].数学的实践与认识,2009(4):231-234.
[5] 张晓卫,燕列雅.四元数矩阵及其线性方程的解[J].廊坊师范学院学报:自然科学版,2010(1):18-20.

The Nature of the Generalized Eigenvalue Matrix on the Quaternion

LU Yuan

(Department of Fundamental Science Teaching, Yancheng Institute of Technology, Yancheng Jiangsu 224051, China)

Abstract: Quaternion matrix eigenvalue research both in theory and in application have the extremely vital significance. It is an important part of the quaternion matrix theory. In this paper, we studied the nature of the quaternion matrix generalized eigenvalue. Some conclusions are real (complex) number domain generalized eigenvalue theory extension.

Keywords: the quaternion; generalized; eigenvalue; nature

(责任编辑:张英健)

版 权 声 明

本刊已许可本刊合作单位以数字化方式复制、汇编、发行、信息网络传播本刊全文,相关著作权使用费与本刊稿酬一次性给付。作者向本刊提交文章发表的行为视为同意我刊上述声明。