

平面对称图形静矩与惯性矩的关系研究

俞晓明^{1,2}, 李春密²

(1. 盐城工学院 基础教学部, 江苏 盐城 224051; 2. 北京师范大学 物理系, 北京 100875)

摘要: 定义平面图形 K 绕 Ox 轴、 Oy 轴的静矩与惯性矩关系系数分别为 p_x 、 p_y , 通过对矩形、椭圆等典型图形 p_x 、 p_y 的计算发现, 具有双重垂直对称平面图形 K 存在 $p_x = p_y = \text{常数}$ 的关系; 通过对等腰三角形、对称四边形等典型图形 p_x 、 p_y 的计算发现, 具有单重对称平面图形存在 $p_x = \text{常数} 1$ 、 $p_y = \text{常数} 2$ 的关系, 且在这两种情况下, p_x 、 p_y 均具有标度变换不变性等性质。

关键词: 平面对称图形; 静矩; 惯性矩; 静矩与惯性矩关系系数; 标度变换

中图分类号: O312.3 文献标识码: A 文章编号: 1671-5322(2013)01-0005-05

静矩也称一次矩或面积矩, 反映构件的重要截面特性; 惯性矩也称二次矩, 反映构件的扭转抵抗力。目前, 对静矩和惯性矩的研究主要侧重于两个方面: 一是将静矩和惯性矩作为研究方法, 研究其在工程中的应用^[1-3], 二是关于计算平面图形静矩和惯性矩的方法研究^[4,5]等。

一般平面图形的静矩与惯性矩间没有简单的关系, 作者在研究液体倾斜的稳度问题时发现: 若定义平面图形 K 绕 Ox 轴、 Oy 轴的静矩与惯性矩关系系数分别为 p_x 、 p_y , 则通过对矩形、椭圆等典型图形 p_x 、 p_y 的计算发现, 具有双重垂直对称平面图形 K 存在 $p_x = p_y = \text{常数}$ 的关系; 通过对等腰三角形、对称四边形等典型图形 p_x 、 p_y 的计算后发现, 具有单重对称平面图形存在 $p_x = \text{常数} 1$ 、 $p_y = \text{常数} 2$ 的关系, 并且这两种对称情况下, p_x 、 p_y 均具有诸如标度变换不变性等性质。

1 静矩与惯性矩的定义

如图 1 所示, 平面图形 K 处于 Oxy 平面内, 在图形 K 上 (x, y) 处取面积微元 dA , 定义平面图形 K 绕 Oy 轴的静矩 S_y 、惯性矩 J_y 以及绕 Ox 轴的静矩 S_x 、惯性矩 J_x 分别为

$$S_y = \int x dA \tag{1}$$

$$J_y = \int x^2 dA \tag{2}$$

$$S_x = \int y dA \tag{3}$$

$$J_x = \int y^2 dA \tag{4}$$

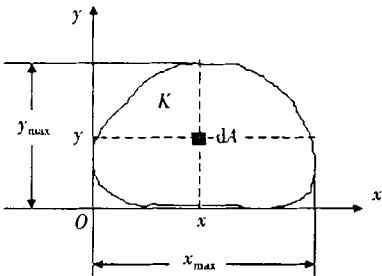


图 1 静矩与惯性矩的定义
Fig. 1 Definition of static moment and moment of inertia

定义平面图形 K 绕 Oy 轴、 Ox 轴的静矩与惯性矩关系系数分别为

$$P_y = \frac{S_y x_{\max} - J_y}{J_y} \tag{5}$$

$$P_x = \frac{S_x y_{\max} - J_x}{J_x} \tag{6}$$

式(5)中的 $x_{\max}$ 和式(6)中的 $y_{\max}$ 分别为平面图形 K 在轴 Ox 和轴 Oy 方向上的最大长度。

2 具有双重垂直对称典型平面图形静矩与惯性矩关系系数的计算

2.1 矩形的静矩与惯性矩关系系数

设矩形 $ABCD$ 的长为 a 、宽为 b 。在矩形上 x

收稿日期: 2013-02-18
作者简介: 俞晓明(1977-), 男, 江苏如皋人, 讲师, 博士生, 主要研究方向为物理课程与教学论。

处,取长 b 、宽 dx 的矩形微元,如图 2a 所示,则其面积 $dA = bdx$,绕轴 Oy 的静矩 S_y 、惯性矩 J_y 分别为

$$S_y = \int x dA = \int_0^a x b dx = \frac{1}{2} a^2 b$$

$$J_y = \int x^2 dA = \int_0^a x^2 b dx = \frac{1}{3} a^3 b$$

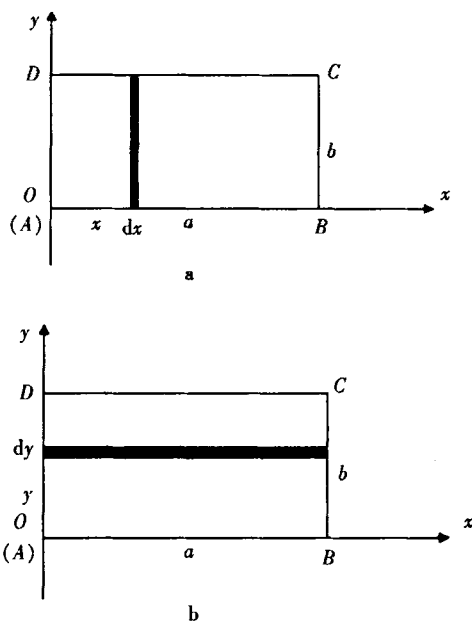


图 2 矩形的静矩与惯性矩关系系数

Fig. 2 Coefficient of the relationship between static moment and moment of inertia for a rectangle

静矩与惯性矩关系系数

$$p_y = \frac{S_y x_{\max} - J_y}{J_y} = \frac{\frac{1}{2} a^2 b a - \frac{1}{3} a^3 b}{\frac{1}{3} a^3 b} = \frac{1}{2} \quad (7)$$

取如图 2b 所示的矩形微元,则其绕轴 Ox 的静矩 S_x 、惯性矩 J_x 分别为

$$S_x = \int y dA = \int_0^b y a dy = \frac{1}{2} a b^2$$

$$J_x = \int y^2 dA = \int_0^b y^2 a dy = \frac{1}{3} a b^3$$

静矩与惯性矩关系系数

$$p_x = \frac{S_x y_{\max} - J_x}{J_x} = \frac{\frac{1}{2} a b^2 b - \frac{1}{3} a b^3}{\frac{1}{3} a b^3} = \frac{1}{2} \quad (8)$$

2.2 椭圆的静矩与惯性矩关系系数的计算

设椭圆的半径分别为 a 、 b ,取如图 3a 所示的

矩形微元,则其面积 $dA = 2b \sqrt{1 - \left(\frac{x-a}{a}\right)^2} dx$,绕

轴 Oy 的静矩 S_y 、惯性矩 J_y 分别为

$$S_y = \int x dA =$$

$$\int_0^{2a} x 2b \sqrt{1 - \left(\frac{x-a}{a}\right)^2} dx = \pi a^2 b$$

$$J_y = \int x^2 dA =$$

$$\int_0^{2a} x^2 2b \sqrt{1 - \left(\frac{x-a}{a}\right)^2} dx = \frac{5}{4} \pi a^3 b$$

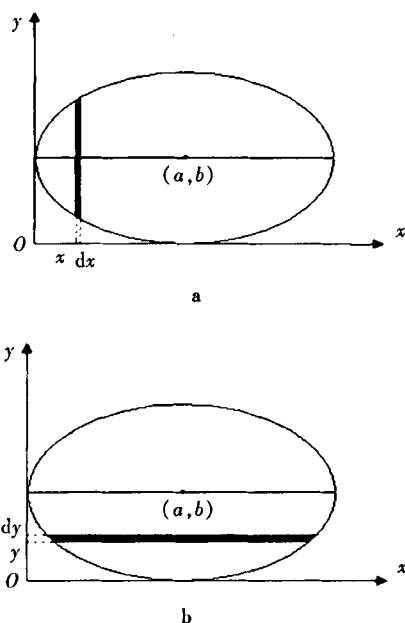


图 3 圆形的静矩与惯性矩关系系数

Fig. 3 Coefficient of the relationship between static moment and moment of inertia for an oval

静矩与惯性矩关系系数

$$p_y = \frac{S_y x_{\max} - J_y}{J_y} = \frac{\pi a^2 b 2a - \frac{5}{4} \pi a^3 b}{\frac{5}{4} \pi a^3 b} = \frac{3}{5} \quad (9)$$

取如图 3b 所示的矩形微元,则其面积 $dA = 2a \sqrt{1 - \left(\frac{y-b}{b}\right)^2} dy$,绕轴 Ox 的静矩 S_x 、惯性矩 J_x 分别为

$$S_x = \int y dA =$$

$$\int_0^{2b} y 2a \sqrt{1 - \left(\frac{y-b}{b}\right)^2} dy = \pi a b^2$$

$$J_x = \int y^2 dA =$$

$$\int_0^{2b} y^2 2a \sqrt{1 - \left(\frac{y-b}{b}\right)^2} dy = \frac{5}{4} \pi a b^3$$

静矩与惯性矩关系系数

$$p_x = \frac{S_x y_{\max} - J_x}{J_x} = \frac{\pi ab^2 2b - \frac{5}{4} \pi ab^3}{\frac{5}{4} \pi ab^3} = \frac{3}{5} \quad (10)$$

3 具有单重对称典型平面图形静矩与惯性矩关系系数的计算

3.1 等腰三角形静矩与惯性矩关系系数的计算

如图4a所示,设 $\triangle ABC$ 为等腰三角形,顶角 $\angle ACB$ 为 2θ ,底边 AB 上的高 CD 平行于 Ox 轴且长为 h 。在 $\triangle ABC$ 上距顶点 C 为 x 处取垂直于 Ox 轴、宽度为 dx 、长度为 $2x \tan \theta$ 的矩形微元,则其面积 $dA = 2x \tan \theta dx$,绕轴 Oy 的静矩 S_y 、惯性矩 J_y 分别为

$$S_y = \int x dA = \int_0^h x 2x \tan \theta dx = \frac{2}{3} \tan \theta h^3$$

$$J_y = \int x^2 dA = \int_0^h x^2 2x \tan \theta dx = \frac{2}{4} \tan \theta h^4$$

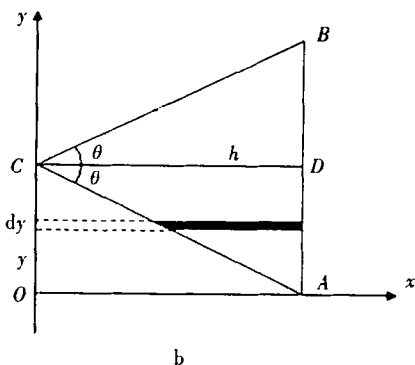
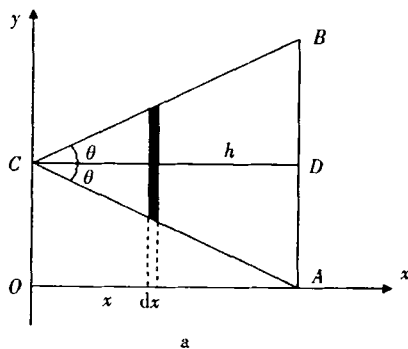


图4 等腰三角形的静矩与惯性矩关系系数

Fig.4 Coefficient of the relationship between static moment and moment of inertia for an isosceles triangle

静矩与惯性矩关系系数

$$p_y = \frac{S_y x_{\max} - J_y}{J_y} = \frac{\frac{2}{3} \tan \theta h^3 h - \frac{2}{4} \tan \theta h^4}{\frac{2}{4} \tan \theta h^4} = \frac{1}{3} \quad (11)$$

在 $\triangle ABC$ 上距点 A 为 y 处取矩形微元如图4b所示的矩形微元,则绕轴 Ox 的静矩 S_x 、惯性矩 J_x 分别为

$$S_x = \int y dA = \int_0^{h \tan \theta} y y \cot \theta dy +$$

$$\int_{h \tan \theta}^{2h \tan \theta} y \frac{2h \tan \theta - y}{\tan \theta} dy = h^3 \tan^2 \theta$$

$$J_x = \int y^2 dA = \int_0^{h \tan \theta} y^2 y \cot \theta dy +$$

$$\int_{h \tan \theta}^{2h \tan \theta} y^2 \frac{2h \tan \theta - y}{\tan \theta} dy = \frac{7}{6} h^4 \tan^3 \theta$$

静矩与惯性矩关系系数

$$p_x = \frac{S_x y_{\max} - J_x}{J_x} = \frac{h^3 \tan^2 \theta \cdot 2h \tan \theta - \frac{7}{6} h^4 \tan^3 \theta}{\frac{7}{6} h^4 \tan^3 \theta} = \frac{5}{7} \quad (12)$$

3.2 对称四边形静矩与惯性矩关系系数的计算

如图5a,设四边形 $ABCD$ 关于对角线 BD 对称,点 E 为对角线 AC 、 BD 的交点,对角线长 AC 的长为 $2a$,顶角 $\angle ADC$ 、 $\angle ABC$ 分别为 2θ 、 2α 。取矩形微元如图5a所示,则

$$S_y = \int_0^{a \cot \theta} x 2x \tan \theta dx +$$

$$\int_{a \cot \theta}^{a(\cot \theta + \cot \alpha)} x \frac{2a(\cot \theta + \cot \alpha) - 2x}{\cot \alpha} dx =$$

$$\left(\frac{2}{3} \cot^2 \theta + \cot \theta \cot \alpha + \frac{1}{3} \cot^2 \alpha \right) a^3$$

$$J_y = \int_0^{a \cot \theta} x^2 2x \tan \theta dx +$$

$$\int_{a \cot \theta}^{a(\cot \theta + \cot \alpha)} x^2 \frac{2a(\cot \theta + \cot \alpha) - 2x}{\cot \alpha} dx =$$

$$\frac{1}{6} (3 \cot^3 \theta + 6 \cot^2 \theta \cot \alpha + 4 \cot \theta \cot^2 \alpha + \cot^3 \alpha) a^4$$

静矩与惯性矩关系系数

$$p_y = \frac{S_y x_{\max} - J_y}{J_y} = \frac{\tan^2 \theta + 3 \tan \theta \tan \alpha + \tan^2 \alpha}{\tan^2 \theta + 3 \tan \theta \tan \alpha + 3 \tan^2 \alpha} \quad (13)$$

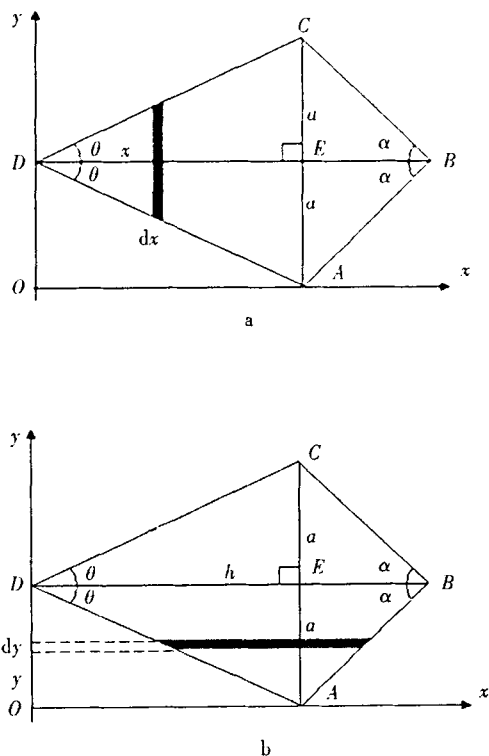


图 5 对称四边形的静矩与惯性矩关系系数
Fig. 5 Coefficient of the relationship between static moment and moment of inertia for a symmetric quadrilateral

取矩形微元如图 5b 所示,则

$$S_x = \int_0^a yy(\cot \theta + \cot \alpha) dy + \int_a^{2a} y(2a - y)(\cot \theta + \cot \alpha) dy = a^3(\cot \theta + \cot \alpha)$$

$$J_x = \int_0^a y^2 y(\cot \theta + \cot \alpha) dy + \int_a^{2a} y^2(2a - y)(\cot \theta + \cot \alpha) dy = \frac{7}{6}a^4(\cot \theta + \cot \alpha)$$

静矩与惯性矩关系系数

$$p_x = \frac{S_y x_{\max} - J_y}{J_y} = \frac{a^3(\cot \theta + \cot \alpha)2a - \frac{7}{6}a^4(\cot \theta + \cot \alpha)}{\frac{7}{6}a^4(\cot \theta + \cot \alpha)} = \frac{5}{7} \quad (14)$$

4 典型平面图形 K 静矩与惯性矩关系系数 p_x 、 p_y 的性质

对于处于第 1 象限并分别与轴 Ox 、 Oy 相切的平面图形 K,若其对称轴平行于轴 Ox 或 Oy 轴,则其静矩与惯性矩关系系数 p_x 、 p_y 具有如下性质。

4.1 p_x 、 p_y 的标度变换不变性

尺度大小的变换叫做“标度变换”,通常遇到的物理系统是不具有标度变换下的不变性的^[6]。而对矩形而言,由式(7)、式(8)可知,静矩与惯性矩关系系数 p_x 、 p_y 的值与矩形的边长 a 、 b 无关;由式(9)、式(10)可知,对于椭圆, p_x 、 p_y 与椭圆的半径 a 、 b 无关;由式(11)、式(12)可知,对于对称轴平行于 Ox 轴的任意等腰三角形,其 p_x 、 p_y 也与三角形的顶角 θ 、底边的高 h 无关;由式(13)、式(14)可知,对于对称轴平行于 Ox 轴的任意对称四边形,其静矩与惯性矩关系系数 p_x 、 p_y 也与对角线的长度($2a$)无关。

4.2 p_x 、 p_y 的等值性

若平面图形 K 具有双重垂直对称性,则 $p_y = p_x$,尽管对称图形的形状不同, p_x 、 p_y 的值不同。在本文中,对于矩形,由式(7)、(8)可知, $p_y = p_x = \frac{1}{2}$;对于椭圆,由式(9)、(10)可知, $p_y = p_x = \frac{3}{5}$;对于菱形,可令图 5a 中的 $\alpha = \theta$,代入式(13)得 $p_y = \frac{5}{7}$,此时同样存在 $p_y = p_x = \frac{5}{7}$ 。

4.3 p_x (或 p_y) 单方向上的叠加不变性

图 5a 所示的对称四边形,可视为由图 4a 所示的等腰三角形沿轴 Ox 方向叠加一个与之共对称轴的等腰三角形而成,此时对称四边形与等腰三角形具有相同的 p_x 。

4.4 p_x (或 p_y) 单方向上的平移不变性

若将平面图形 K 沿轴 Ox (或轴 Oy) 平行移动,则平面图形 K 在该方向的静矩与惯性矩关系系数 p_y (或 p_x) 的值保持不变,但 p_x 与 p_y 不再具有简单的关系。

5 结语

静矩与惯性矩关系系数 p_x 、 p_y 的定义是在研究液体倾斜的稳度问题时被发现的,液体的稳度与之有关,具体内容将另文阐述。

基于静矩与惯性矩关系系数 p_x 、 p_y 的定义,作者计算出了典型平面对称图形(矩形、椭圆、等腰三角形以及对称四边形)的 p_x 、 p_y ,发现 p_x 、 p_y 具有如下性质:标度变换不变性、等值性、单方向上的叠加不变性和单方向上的平移不变性。这些性

质只是从几个典型平面图形推知,严格的数学证明还请有识之士不吝赐教。此外,静矩与惯性矩关系系数 p_x 、 p_y 的定义式(5)和式(6)中的 $x_{\max}$ 、 $y_{\max}$ 分别取的是平面图形 K 在轴 Ox 和轴 Oy 方向上的最大长度,这是偶然还是必然,尚不可知。

参考文献:

- [1] 陈昌业. 静矩法在建筑幕墙门窗抗风压性能较核中的妙用[J]. 中国建筑金属结构, 2005(2): 13-17.
- [2] 陆念力, 王佳, 兰朋. 格构式构件整体稳定性分析的等效惯性矩法[J]. 建筑机械, 2008(8): 79-84.
- [3] 万金国, 杜新喜, 谭美超, 等效惯性矩法分析楔形构件[J]. 华中科技大学学报: 城市科学版, 2008(9): 35-36, 49.
- [4] 蔡方蔭. 不规则平面形之静矩, 重心, 惯性矩及惯性积之新算法[J]. 清华大学学报: 自然科学版, 1947(12): 15-30.
- [5] 温志明, 张流生. 单元坐标法求截面静矩、惯性矩及惯性积[J]. 南方冶金学院学报, 2001(7): 293-295.
- [6] 赵凯华. 新概念物理教程(力学)[M]. 北京: 高等教育出版社, 2010(11): 232.

Research on Coefficient of the Relationship between Static Moment and Moment of Inertia

YU Xiao-ming^{1,2}, LI Chun-mi²

(1. Department of Basic Courses, Yancheng Institute of Technology, Yancheng Jiangsu 224051, China;
2. Department of Physics, Beijing Normal University, Beijing 100875, China)

Abstract: Given definition p_x and p_y to the coefficient of relationship between static moment and moment of inertia for a plane figure K rotating along Ox -axis and Oy -axis, it can be found after calculation of a rectangle and an oval that p_x is equal to p_y and equal to a constant for a symmetrical plane figure K which has two symmetry axis perpendicular to each other. After calculation of a isosceles triangle and a symmetric quadrilateral, it also can be found that for a symmetrical plane figure K which has only one symmetry axis p_x is equal to constant 1 and p_y equal to constant 2. These two cases tell that p_x and p_y has many features such as the feature of invariance of the scale conversion.

Keywords: plane figure; static moment; moment of inertia; coefficient of the relationship between static moment and moment of inertia; invariance of the scale conversion

(责任编辑: 张英健)