

由分式积分算子定义的一致凸函数类的子集

陈建兰

(南通航运职业技术学院 基础教学部, 江苏 南通 226010)

摘要:通过 Hadamard 积定义了一个分式积分算子, 并利用分式积分算子得到了单位开圆内具有负系数的一致凸函数类的新子类。主要研究了新子类的特征性质的充要条件是, 及系数估计。

关键词:解析函数; 一致凸; 分式积分算子

中图分类号: O174.51

文献标识码: A

文章编号: 1671-5322(2013)01-0018-03

1 问题的提出

近几年来, 分式积分算子在解析函数理论中取得了许多有趣的性质和应用。文献中, 研究了各类分式积分算子定义的解析函数类新子集的包含关系、卷积性质、系数估计等。本文主要研究了一类由分式积分算子定义的具有负系数的一致凸函数类子集的系数估计、特征性质, 并可将其推广到其他的具有固定系数的函数类。

设 A 表示形如 $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ 且在单位开圆 $U = \{z: |z| < 1\}$ 内解析单叶的函数全体所组成的函数类。另外, 定义 A 的子集 $T^{[1]}$, 表示形如 $f(z) = z - \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ ($a_n \geq 0$) 的函数所组成的函数类。

若函数 $f(z) \in A$, 且满足

$$\operatorname{Re}\left\{1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} - \alpha\right\} \geq \left|\frac{zf''(z)}{f'(z)} - 1\right|,$$

其中 $-1 \leq \alpha < 1, z \in U$, 则称 $f(z)$ 属于 α 阶一致凸函数类^[2], 记为 $UCV(\alpha)$ 。

若 $f(z)$ 满足 $\operatorname{Re}\left\{1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} - \alpha\right\} \geq \left|\frac{zf''(z)}{f'(z)} - 1\right|$, 则称 $f(z)$ 属于 α 阶一致星像函数类, 记为 $S_p(\alpha)$ 。显然, $S_p(\alpha)$ 是 $UCV(\alpha)$ 子集, 且有

$$f(z) \in UCV(\alpha) \Leftrightarrow zf'(z) \in S_p(\alpha)$$

若 $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n, g(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} b_n z^n$, 定义 Hadamard 积 (卷积) 为

$$(f * g)(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n b_n z^n.$$

对于 $f \in A$, 定义算子 $D^\lambda: A \rightarrow A$, 满足 $D^\lambda f(z) = \frac{z}{(1-z)^{\lambda+1}} * f(z)$ ($\lambda > -1, z \in U$), 这就是著名的 Ruscheweyh 导数, 很多学者对其进行了深入的研究^[3-4]。

受 Ruscheweyh 导数的启发, 我们定义算子 $I_{\lambda, \mu}: A \rightarrow A: I_{\lambda, \mu} f(z) = f_{\lambda, \mu}(z) * f(z)$, 其中 $f_{\lambda, \mu}(z)$ 满足

$$\frac{z}{(1-z)^{\lambda+1}} * f_{\lambda, \mu}(z) = \frac{z}{(1-z)^\mu}, \lambda > -1, \mu > 0.$$

由定义可得

$$I_{\lambda, \mu} f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(\mu)_{n-1}}{(\lambda+1)_{n-1}} a_n z^n$$

其中 $(\lambda)_n$ 是 Pochhammer 符号, 定义如下:

$$(\lambda)_n = \frac{\Gamma(\lambda+n)}{\Gamma(\lambda)} =$$

$$\begin{cases} 1, n=0, \lambda \neq 0; \\ \lambda(\lambda+1) \cdots (\lambda+n-1), n \in N \end{cases}$$

显然, 当 $\lambda=0, \mu=1$ 时, $I_{\lambda, \mu} f(z) = f(z)$; 当 $\lambda=0, \mu=2$ 时, $I_{\lambda, \mu} f(z) = zf'(z)$ 。

利用分式积分算子 $I_{\lambda, \mu}$ 我们定义 A 的一个新子类 $S_{\lambda, \mu}(\alpha)$:

定义 对于 $-1 \leq \alpha < 1$, 若 $f(z) \in A$ 且满足 $\operatorname{Re}\left\{\frac{z(I_{\lambda, \mu} f(z))'}{I_{\lambda, \mu} f(z)} - \alpha\right\} \geq \left|\frac{z(I_{\lambda, \mu} f(z))'}{I_{\lambda, \mu} f(z)} - 1\right|, z \in U$

收稿日期: 2013-02-07

作者简介: 陈建兰 (1981-), 女, 江苏如皋人, 讲师, 硕士, 主要研究方向为基础数学。

其中 $\lambda > -1, \mu > 0$, 则称 $f(z) \in S_{\lambda, \mu}(\alpha)$ 。

现在我们定义函数类 $TS(\lambda, \mu, \alpha) = S_{\lambda, \mu} \cap T$, 本文主要研究了 $f(z) \in TS(\lambda, \mu, \alpha)$ 所满足的充要条件。

2 主要结论

定理 1 若 $f(z) \in A$ 且满足

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(2n-\alpha-1)}{1-\alpha} \frac{(\mu)_{n-1}}{(\lambda+1)_{n-1}} |a_n| \leq 1$$

则 $f(z) \in S_{\lambda, \mu}(\alpha)$, 其中 $-1 \leq \alpha < 1$ 。

证明: 要说明 $f(z) \in S_{\lambda, \mu}(\alpha)$, 由定义可知, 只需说明

$$\operatorname{Re} \left\{ \frac{z(I_{\lambda, \mu} f(z))'}{I_{\lambda, \mu} f(z)} - \alpha \right\} \geq \left| \frac{z(I_{\lambda, \mu} f(z))'}{I_{\lambda, \mu} f(z)} - 1 \right|$$

即

$$\left| \frac{z(I_{\lambda, \mu} f(z))'}{I_{\lambda, \mu} f(z)} - 1 \right| \leq \operatorname{Re} \left\{ \frac{z(I_{\lambda, \mu} f(z))'}{I_{\lambda, \mu} f(z)} - 1 \right\} + 1 - \alpha$$

即需说明

$$\left| \frac{z(I_{\lambda, \mu} f(z))'}{I_{\lambda, \mu} f(z)} - 1 \right| - \operatorname{Re} \left\{ \frac{z(I_{\lambda, \mu} f(z))'}{I_{\lambda, \mu} f(z)} - 1 \right\} \leq 1 - \alpha$$

而

$$\begin{aligned} & \left| \frac{z(I_{\lambda, \mu} f(z))'}{I_{\lambda, \mu} f(z)} - 1 \right| - \operatorname{Re} \left\{ \frac{z(I_{\lambda, \mu} f(z))'}{I_{\lambda, \mu} f(z)} - 1 \right\} \leq \\ & 2 \left| \frac{z(I_{\lambda, \mu} f(z))'}{I_{\lambda, \mu} f(z)} - 1 \right| \leq \\ & \frac{2 \sum_{n=2}^{\infty} (n-1) \frac{(\mu)_{n-1}}{(\lambda+1)_{n-1}} |a_n|}{1 - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(\mu)_{n-1}}{(\lambda+1)_{n-1}} |a_n|} \end{aligned}$$

因为

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(2n-\alpha-1)}{1-\alpha} \frac{(\mu)_{n-1}}{(\lambda+1)_{n-1}} |a_n| \leq 1$$

所以

$$\frac{2 \sum_{n=2}^{\infty} (n-1) \frac{(\mu)_{n-1}}{(\lambda+1)_{n-1}} |a_n|}{1 - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(\mu)_{n-1}}{(\lambda+1)_{n-1}} |a_n|} \leq 1 - \alpha$$

从而定理得证。

定理 2 若 $f(z) \in T$, 则 $f(z) \in TS(\lambda, \mu, \alpha)$ 的充要条件是

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(2n-\alpha-1)}{1-\alpha} \frac{(\mu)_{n-1}}{(\lambda+1)_{n-1}} |a_n| \leq 1,$$

其中 $-1 \leq \alpha \leq 1$ 。

证明: 由定理 1 可知, 充分性已得到说明, 我们只需要说明其必要性即可。

因为 $f(z) \in TS(\lambda, \mu, \alpha)$, 不妨设 z 为实数, 则由定义可知

$$\operatorname{Re} \left\{ \frac{z(I_{\lambda, \mu} f(z))'}{I_{\lambda, \mu} f(z)} - \alpha \right\} \geq \left| \frac{z(I_{\lambda, \mu} f(z))'}{I_{\lambda, \mu} f(z)} - 1 \right|$$

等价于

$$\begin{aligned} & 1 - \sum_{n=2}^{\infty} n \frac{(\mu)_{n-1}}{(\lambda+1)_{n-1}} a_n z^{n-1} \\ & 1 - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(\mu)_{n-1}}{(\lambda+1)_{n-1}} a_n z^{n-1} \\ & \left| \sum_{n=2}^{\infty} (n-1) \frac{(\mu)_{n-1}}{(\lambda+1)_{n-1}} a_n z^{n-1} \right| \\ & 1 - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(\mu)_{n-1}}{(\lambda+1)_{n-1}} a_n z^{n-1} \end{aligned}$$

令 $z \rightarrow 1$, 则有 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(2n-\alpha-1)}{1-\alpha} \frac{(\mu)_{n-1}}{(\lambda+1)_{n-1}} |a_n| \leq 1$ 。

从而必要性得以说明。

推论 设 $f(z) \in TS(\lambda, \mu, \alpha)$, 则有 $a_n \leq \frac{(\lambda+1)_{n-1}}{(\mu)_{n-1}} \frac{1-\alpha}{2n-1-\alpha}, n \geq 2$ 。

定理 3 若 $f(z) = z - \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \in TS(\lambda, \mu, \alpha)$, 则有

$$\begin{aligned} & |z| - |z|^2 \frac{(1-\alpha)(\lambda+1)}{(3-\alpha)\mu} \leq |I_{\lambda, \mu} f(z)| \leq \\ & |z| + |z|^2 \frac{(1-\alpha)(\lambda+1)}{(3-\alpha)\mu} \end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned} & 1 - 2|z| \frac{(1-\alpha)(\lambda+1)}{(3-\alpha)\mu} \leq |I_{\lambda, \mu} f(z)'| \leq \\ & 1 + 2|z| \frac{(1-\alpha)(\lambda+1)}{(3-\alpha)\mu} \end{aligned}$$

当 $f(z) = z - \frac{(1-\alpha)(\lambda+1)}{(3-\alpha)\mu} z^2$ 时可取等号。

证明: 因为 $f(z) \in TS(\lambda, \mu, \alpha)$, 由定理 2 可知

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(2n-\alpha-1)}{1-\alpha} \frac{(\mu)_{n-1}}{(\lambda+1)_{n-1}} |a_n| \leq 1,$$

所以

$$|I_{\lambda, \mu} f(z)| \geq |z| - |z|^2 \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| \geq$$

$$|z| - |z|^2 \frac{(1-\alpha)(\lambda+1)}{(3-\alpha)\mu}$$

$$|I_{\lambda, \mu} f(z)| \leq |z| + |z|^2 \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| \leq$$

$$|z| + |z|^2 \frac{(1-\alpha)(\lambda+1)}{(3-\alpha)\mu} \leq |1 + 2|z| \frac{(1-\alpha)(\lambda+1)}{(3-\alpha)\mu}|$$

$$1 - 2|z| \frac{(1-\alpha)(\lambda+1)}{(3-\alpha)\mu} \leq |I_{\lambda,\mu}f(z)'| \leq \text{显然成立。}$$

参考文献:

- [1] Yang Ding - Gong, Liu Jin - Lin. On Sakaguchi Functions[J]. International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, 2003, 26: 1 923 - 1 931.
- [2] Liu Jin - Lin. Some Applications of Certain Integral Operator[J]. KYUNGPOOK Mathematics Journal, 2003, 43: 211 - 219.
- [3] Liu Jin - Lin. A linear operator and strongly starlike functions[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2002, 54: 975 - 981.
- [4] 陈建兰, 韦叶, 刘金林. 由算子定义的解析函数的卷积性质[J]. 扬州大学学报: 自然科学版, 2006, 9(4): 4 - 6.
- [5] Silverman H. Univalent functions with negative coefficients[J]. Proejct of Amercian Mathematics Society, 1975, 51: 1 091 - 1 116.
- [6] Nning F R. Integral representations for bounded starlike functions[J]. Computers and mathematics with applications, 1995, 60: 289 - 297.
- [7] Liu J L. Certain integral operator and strongly starlike functions[J]. International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, 2002, 30: 569 - 574.
- [8] 程艳莉, 刘金林. 一个线性算子及其相关的亚纯多叶函数类[J]. 扬州大学学报: 自然科学版, 2004, 7(2): 10 - 12.

A Subclass of Uniformly Convex Functions Defined by a Certain Fractional Calculus Operator

CHEN Jian-lan

(Basic Teaching Department, Nantong Shipping College, Nantong Jiangsu 226010, China)

Abstract: Making use of a linear oerator is defined here by means of a Hadamard product. This introduces paper a new class of uniformly convex functions with negative coefficients defined by using a certain fractional calculus operator. In this paper, we discuss the characterization property: a necessary and sufficient condition for the new subclasses and the coefficient estimates.

Keywords: analytic functions; uniformly convex; fractional calculus operator

(责任编辑: 张振华)