

## 基于状态反馈的四轮转向汽车 LQR 优化控制

吕红明

(盐城工学院 车辆工程系,江苏 盐城 224051)

**摘要:**为了提高汽车的操纵稳定性,以 4 轮转向(4WS)汽车为研究对象,建立了 2 自由度系统的数学模型和状态方程。并以横摆角速度和侧偏角为优化目标,设计了线性二次型调节器(LQR)。通过质心侧偏角和横摆角速度的共同反馈,控制汽车后轮转角,实现 4WS 控制。在 MATLAB/Simulink 环境下完成了传统前轮转向汽车、零侧偏角比例控制及 LQR 控制的 4WS 汽车仿真。结果表明,相对于其他控制策略,基于状态反馈的 LQR 优化控制能够改善汽车的操纵稳定性,但不能够既将汽车的质心侧偏角降到基本为零,同时又保证横摆角速度处于理想状态。因此,汽车动力学集成控制将是未来汽车发展的重要方向。

**关键词:**四轮转向;汽车;线性二次型调节器;控制;仿真

**中图分类号:**U461.6 **文献标识码:**A **文章编号:**1671-5322(2013)02-0040-05

随着现代道路交通系统和汽车技术的发展,汽车行驶的速度不断提高,高速行驶的安全问题日益突出。汽车在高速行驶情况下进行车道变换、超车、弯道行驶时,减少车身侧偏,提高车辆安全性成为当前亟待解决的问题。传统前轮转向(FWS)汽车在高速转向时,无法对车身的大侧偏角和侧滑角控制,车辆循迹能力差,容易发生侧滑和侧翻。近年来,4 轮转向(4WS)通过后轮辅助转向,可能会改善车辆的低速操纵性和高速稳定性,受到了各国研究者的重视。但是由于实车开发的困难,利用仿真手段<sup>[1]</sup>研究先进技术的可行性,已经成为汽车研究的重要手段。因此,本文基于 MATLAB/Simulink,对提出的 4WS 车辆控制算法进行了仿真研究。

### 1 4WS 汽车侧向动力学模型

假设:①忽略转向系统的影响,直接以前轮转角作为输入;忽略悬架的作用,认为汽车只在平行于地面的平面内运动,即汽车沿  $z$  轴的平移,绕  $y$  轴的俯仰,绕  $x$  轴的侧倾均忽略不计,只有沿  $y$  轴的平移和绕  $z$  轴的转动;②侧向加速度小于  $0.4 g$ ,前后轮侧偏角小于  $5^\circ$ ,轮胎侧偏特性处于线性

范围;③驱动力不大,忽略空气动力的作用;④不考虑地面切向力对轮胎侧偏特性的影响;⑤忽略左右轮胎由于载荷变化引起轮胎特性的变化以及轮胎回正力矩的作用。可以用一个线性 2DOF 模型来预测车辆的动态行为,如图 1 所示<sup>[2,3]</sup>。汽车线性 2DOF 动力学模型集中了车辆的主要性能,把影响汽车性能的参数减至最少,从本质上反映了汽车操纵动力学特性,利用它从理论上对车辆操纵性能进行分析,可以得出普遍适用的具有指导性的结论。

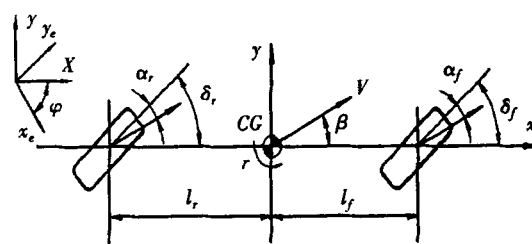


图 1 2DOF 车辆侧向运动模型

Fig. 1 2DOF vehicle lateral dynamic model

建模时以前轮转角作为输入,忽略汽车的侧倾与俯仰运动,认为汽车只作平行于地面的平面

收稿日期:2013-05-08

基金项目:江苏省重点学科建设项目(XKY2009058)

作者简介:吕红明(1975-),男,江苏大丰人,副教授,博士生,主要研究方向为汽车动力学及振动噪声控制。

运动。根据车辆运动学关系,建立动力学微分方程。

$$\begin{cases} (k_f + k_r)\beta + \frac{1}{V}(l_f k_f - l_r k_r)r - \\ k_f \delta_f - k_r \delta_r = mV(\dot{\beta} + r) \\ (l_f k_f - l_r k_r)\beta + \frac{1}{V}(l_f^2 k_f + l_r^2 k_r)r - \\ l_f k_f \delta_f + l_r k_r \delta_r = I_x \dot{r} \end{cases} \quad (1)$$

式中, $\beta$ 为质心侧偏角; $r$ 为汽车横摆角速度; $V$ 为质心前进速度; $m$ 为汽车质量; $\dot{\beta}$ 为汽车质心侧偏角速度; $\dot{r}$ 为汽车横摆角加速度; $k_f, k_r$ 分别为前、后轮等效侧偏刚度; $l_f, l_r$ 分别为汽车质心至前、后轴的距离; $\delta_f, \delta_r$ 分别为前、后轮转角; $I_x$ 为汽车绕质心的转动惯量。

取状态变量  $X = [\beta \ r]^T$ , 输入变量  $U = [\delta_f \ \delta_r]^T$ , 输出变量  $Y = [\beta \ r]^T$ , 方程(1)可化为状态方程形式:

$$\begin{cases} \dot{X} = AX + BU \\ Y = CX \end{cases} \quad (2)$$

式中,

$$A = \begin{bmatrix} \frac{k_f + k_r}{mV} & \frac{l_f k_f - l_r k_r}{mV^2} - 1 \\ \frac{l_f k_f - l_r k_r}{I_x} & \frac{l_f^2 k_f + l_r^2 k_r}{I_x V} \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} -\frac{k_f}{mV} & -\frac{k_r}{mV} \\ \frac{l_f k_f}{I_x} & \frac{l_r k_r}{I_x} \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

## 2 后轮转向控制策略

随着控制理论的发展,已经出现多种4WS控制策略<sup>[4,5]</sup>。但是,尽量降低侧偏角,且保证稳定的横摆角速度响应,仍是汽车侧向动力学研究的重要目标。由于二者相互耦合,仅利用后轮转向是不能同时将上述两个状态量同时达到理想目标。目前研究往往利用状态量与理想情况的偏差,进行前轮前馈+状态反馈控制<sup>[6]</sup>,但仿真结果表明只能将两个状态量响应的稳态值同时有所减小、超调时间和稳定时间有所缩短。因此本文仅利用状态反馈控制后轮转向,以期车辆动态特性有所改善。闭环控制系统如图2所示, $K$ 为不同车速下状态变量反馈增益矩阵。

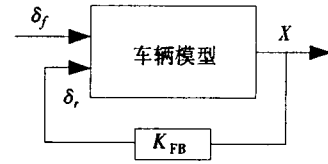


图2 四轮转向控制策略

Fig.2 Control strategy of 4WS vehicle

后轮优化控制率  $U^*$  为

$$U^* = \delta_r = K_{FB}X \quad (3)$$

## 3 后轮转角 LQR 优化控制算法

为寻求最优后轮转角输入  $U^*(t)$ , 应使性能指标  $J$  取极小值。

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} [X^T Q X + U^T R U] dt \quad (4)$$

式中,  $Q, R$  均为加权矩阵;  $Q$  为半正定矩阵;  $R$  为正定矩阵。第一项是用来限制整个控制期间系统的实际状态; 第二项是对控制总量的限制, 即本系统中对控制后轮转角的范围。

采用最小值原理求解这类问题<sup>[7,8]</sup>:

列写哈密顿函数

$$H = \frac{1}{2} [X^T Q X + U^T R U] + \lambda(t) [AX + BU] \quad (5)$$

列写协状态方程

$$\dot{\lambda}(t) = -\frac{\partial H}{\partial X} = -QX - A^T \lambda(t) \quad (6)$$

列写极值条件, 根据  $\frac{\partial H}{\partial U}$ , 得到控制方程

$$\frac{\partial H}{\partial U} = RU + B^T \lambda(t) = 0 \quad (7)$$

因此, 有最优控制

$$U^*(t) = -R^{-1} B^T \lambda(t) \quad (8)$$

为使控制  $U^*(t)$  是状态  $X^*(t)$  的反馈形式,

令

$$\lambda(t) = P(t)X(t) \quad (9)$$

式中  $P(t)$  为中间计算变量。

最优控制为状态反馈形式:

$$U^*(t) = -R^{-1} B^T \lambda = -R^{-1} B^T P X \quad (10)$$

式(9)代入式(6), 得到:

$$\dot{\lambda}(t) = -QX - A^T P(t)X(t) \quad (11)$$

式(10)代入式(2), 得到:

$$\dot{X}(t) = AX(t) - BR^{-1} B^T P(t)X(t) \quad (12)$$

对式(10)求导,得到:

$$\dot{\lambda}(t) = \dot{P}(t)X(t) + P(t)\dot{X}(t) \quad (13)$$

式(12)代入式(13),得到:

$$\dot{\lambda}(t) = \dot{P}(t)X(t) + P(t)\dot{X}(t) = \dot{P}(t)X(t) + P(t)[AX - BR^{-1}B^T P(t)X] \quad (14)$$

令式(11)和(14)相等,考虑  $A, B, Q, R$  为常数矩阵(定常系统)时,  $t \rightarrow \infty, \dot{P}(t) = 0$ , 得出黎卡提方程为:

$$PA + A^T P - PBR^{-1}B^T P + Q = 0 \quad (15)$$

其中  $P$  为代数黎卡提方程的稳态解。

由式(11)解得  $P(t)$ , 最终代回式(10), 表示为状态反馈的形式:

$$U^*(t) = -KX(t); \quad K = R^{-1}B^T P \quad (16)$$

### 4 仿真分析

为了对比分析控制效果,同时进行了相同结构参数的前轮转向(FWS)汽车与后轮转角比例于前轮转角4WS汽车(简称比例控制)的转向响应仿真。后轮转角比例于前轮转角4WS汽车的比值定义为  $K_z$ , 可保证汽车在稳态时质心侧偏角恒为零。

$$K_z = \frac{\delta_r}{\delta_f} = \frac{-l' - ml_f V^2 / [k_r(l_f + l_r)]}{l' - ml_r V^2 / [k_f(l_f + l_r)]} \quad (17)$$

仿真工具采用 MATLAB/Simulink, 仿真模型见图3。系统参数<sup>[4]</sup>为  $m = 1\ 067\text{ kg}, l_f = 1\text{ m}, l_r = 1.5\text{ m}, I_z = 2\ 130\text{ kg} \cdot \text{m}^2, k_f = -55\ 000\text{ N/rad}, k_r = -45\ 000\text{ N/rad}$ , 仿真车速取  $V = 28\text{ m/s}$ , 前轮转向角  $5^\circ$ 。由于权矩阵的选取主要根据经验, 本文权矩阵  $R = [1], Q$  分别取3种情况。

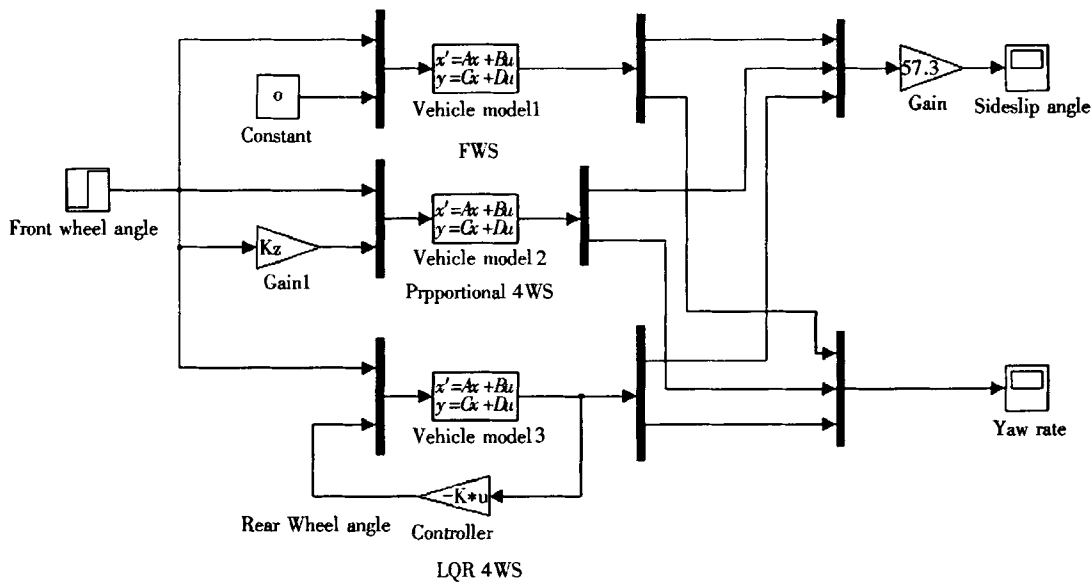


图3 FWS、比例控制及LQ控制4WS车辆 Simulink 模型

Fig.3 The Simulink model of FWS vehicle, 4WS vehicle with proportional control and LQ control

$$Q_1 = \begin{bmatrix} 1 & 600 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, Q_2 = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, Q_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

当取  $Q_1$  权矩阵时, 车辆动态响应如图4和5所示。仿真表明: 当取  $Q_1$  权矩阵时, 4WS 车辆状态量响应很快达到稳态值, 没有振荡, 侧偏角为恒正的较小数值, 且横摆角速度比比例控制4WS的还小。说明第1种LQR控制器能够较好保持驾驶员的操纵方位感, 但会增加驾驶员转向的负担。

当取  $Q_2$  权矩阵时, 车辆动态响应如图6和

7所示。仿真表明: 当取  $Q_2$  权矩阵时, 4WS 车辆状态量响应稳态值与比例控制4WS一致, 瞬态特性优于后者。说明第2种LQR控制器具有较好的零侧偏角特性, 确保驾驶员的操纵方位感, 但横摆角速度响应幅值减小, 同样增加驾驶员转向的负担。

当取  $Q_3$  权矩阵, 车辆动态响应如图8和9所示。仿真表明: 当取  $Q_3$  权矩阵时, 相对于FWS车辆, 4WS 车辆状态量的瞬态响应特性有所改善,

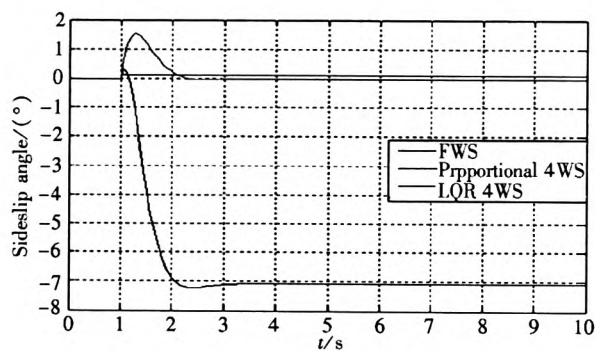


图4 车辆侧偏角响应(Q1 权矩阵)  
Fig.4 Vehicle sideslip response  
(Q1 weight matrix)

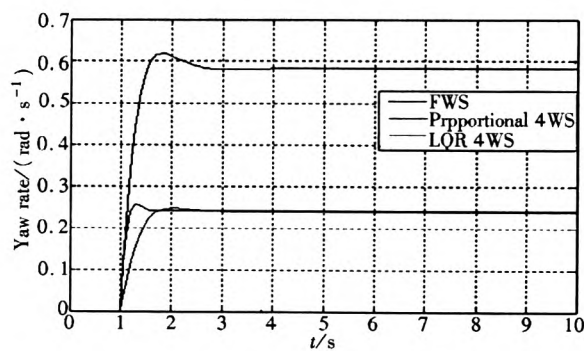


图7 车辆横摆角速度响应(Q2 权矩阵)  
Fig.7 Vehicle yaw rate response  
(Q2 weight matrix)

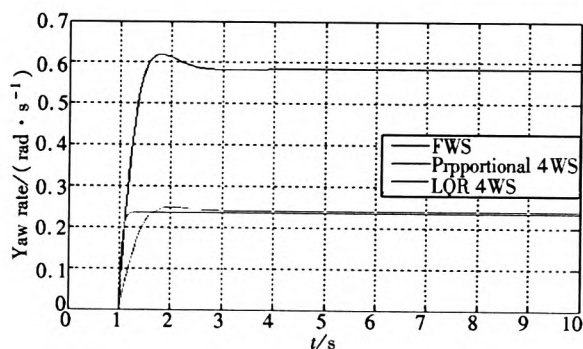


图5 车辆横摆角速度响应(Q1 权矩阵)  
Fig.5 Vehicle yaw rate response  
(Q1 weight matrix)

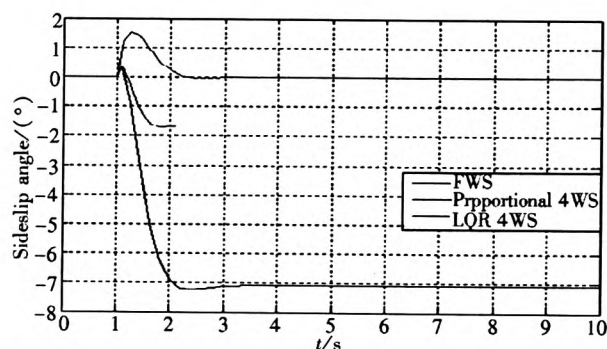


图8 车辆侧偏角响应(Q3 权矩阵)  
Fig.8 Vehicle sideslip response  
(Q3 weight matrix)

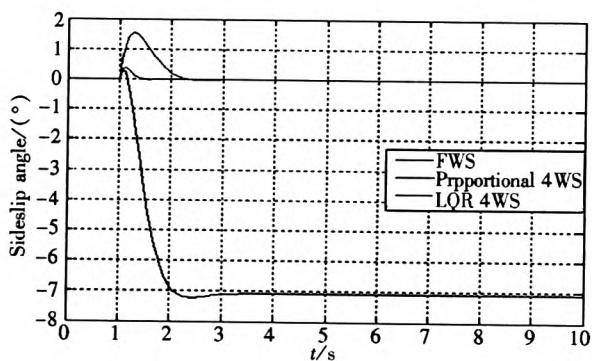


图6 车辆侧偏角响应(Q2 权矩阵)  
Fig.6 Vehicle sideslip response  
(Q2 weight matrix)

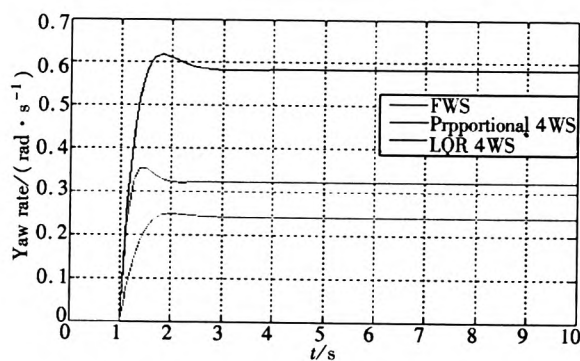


图9 车辆横摆角速度响应(Q3 权矩阵)  
Fig.9 Vehicle yaw rate response  
(Q3 weight matrix)

侧偏角稳态数值减小了约 75%,但横摆角速度稳态数值也减小了 45%。说明驾驶员的操纵方位感有所改善,但同样会有所增加驾驶员转向负担。

### 5 结论

与前轮转向车辆相比,传统的前后轮转角成比例的 4 轮转向车辆,能够将车辆质心侧偏角降

到零,同时又减小了车辆的横摆角速度,造成驾驶员转向感觉不灵敏,会增加驾驶员的操纵负担。

对不同的权矩阵条件下 LQR 最优控制的 4WS 车辆状态量进行了仿真分析。结果表明,通过选择合适的权矩阵,LQR 最优控制能够改善汽车侧偏角和横摆角速度的瞬态和稳态响应特性,从而改善汽车的操纵稳定性。但是,仅利用后轮

转向,不能够既将汽车的侧偏角降到基本为零,又保证横摆角速度基本不变。这就说明汽车设计过程中存在着各种矛盾,因而有时优化设计只能是参数的匹配和效果的折中(Tradeoff)。

为了既减少车身侧偏、提高汽车的操纵稳定

性,同时又保证驾驶员原有的转向感觉,减轻驾驶员操纵难度和疲劳程度,满足车辆的理想性能要求,采用低成本、结构简单、性能可靠的集成控制手段将是车辆动力学发展的重要方向。

#### 参考文献:

- [1] 吴光强,张曙. 汽车数字化开发技术[M]. 北京:机械工业出版社,2009.
- [2] 余志生. 汽车理论[M]. 5版. 北京:机械工业出版社,2009.
- [3] Lv H - M, Chen N, Li P. Multi - variable  $H_{\infty}$  optimal control for Handling and stability of four - wheel steering vehicle based on yaw rate tracking[J]. Proceedings of institute of mechanical engineers, Part D:Journal of Automobile Engineering. 2004,218(10):1 117 - 1 123.
- [4] You S S,Jeong S K. Vehicle dynamics and control synthesis for four wheel steering passengerears[J]. Journal of Automobile Engineenng, 1998,212:449 - 461.
- [5] Zhang R H, Jia H G, Chen T. Dynamics Simulation on Control Technology for 4WS Vehicle Steering Performance[C]. International Colloquium on Computing, Communication, Control, and Management,2008:206 - 209.
- [6] 杜锋,魏朗,赵建有. 基于状态反馈的四轮转向汽车最优控制[J]. 长安大学学报:自然科学版,2008,28(4):91 - 94.
- [7] 邢继祥,张春蕊,徐洪泽. 最优控制应用基础[M]. 北京:科学出版社,2003.
- [8] 何衍庆. 控制系统分析设计和应用:MATLAB 语言的应用[M]. 北京:化学工业出版社,2003.

## LQR Control of Four - wheel Steering Vehicle Based on State Feedback

LV Hong-ming

(School of Automotive Engineering, Yancheng Institute of Technology, Yancheng Jiangsu 224051, China)

**Abstract:** A two degree - of - freedom Four - Wheel Steering (4WS) vehicle is investigated to improve the handling stability. The mathematical model and state equation of 4WS system are established, and a linear quadratic regulator (LQR) controller is proposed. The rear wheel angle is controlled by the feedback of the sideslip angle and yaw rate. The conventional front - wheel steering vehicle, LQR controlled 4WS vehicle as well as proportional controlled 4WS vehicle are simulated with MATLAB /Simulink. The simulation result shows that the LQR strategy can help to improve the handling stability compared to other strategies. But both the sideslip angle and yaw rate cannot reach ideal states simultaneously with any control strategy if only the front and rear wheels are controlled, which points out that the integrated control of vehicle dynamics will be the future for vehicle technology.

**Keywords:** Four - wheel steering; Vehicle; LQR; Control; Simulation

(责任编辑:张振华)