第 27 卷 第 1 期
2014 年 03 月

盐城工学院学报(自然科学版)
Journal of Yancheng Institute of Technology(Natural Science Edition)

Vol. 27 No. 1
Mar. 2014

具有广义 FGM Copula 的复合泊松过程的净保费研究

方　颢,王传玉,戴泽兴

(安徽工程大学 数理学院,安徽 芜湖　241000)

摘要:考虑索赔额与等待时间具有广义 FGM 相依结构的复合泊松过程,在求得总索赔额的矩母函数后,对零利息力和非零利息力下的净保费进行研究,最终得到 Esscher 定价泛函的表达式。

关键词:广义 FGM Copula;净保费;Esscher 定价

中图分类号:O211.9　　**文献标识码**:A　　**文章编号**:1671-5322(2014)01-0010-04

近年来,用 Copula 方法刻画随机变量之间的相依关系在保险精算和风险理论等领域越来越普遍(例如 Cossette[1]、Albreeher 等[2-3])。Copula 函数是一种连接函数,它将一个联合分布与该联合分布的各个边缘分布连接在一起。Nelsen[4] 对 Copula 函数作了详细的介绍并举例 Copula 函数在保费定价中的广泛应用。徐付霞和董永权[5] 以 FGM Copula 及其联合生存函数为基础,拓展出了一系列二参数三次幂的广义 FGM Copula,使 FGM Copula 的种类变得更加繁多,应用范围更为广泛。

2012 年,Marri 和 Furman[6] 考虑了索赔额 $\{Y_n\}_{n\geqslant1}$ 和等待时间 $\{W_n\}_{n\geqslant1}$ 之间为 FGM Copula 相依的情形,对相应的总索赔额,记为 $X_{t,\theta}$,进行了研究。文献[7]将其中的 FGM Copula 推广为广义 FGM Copula,建立了 Esscher 定价公式。本文在广义 FGM Copula 条件下,利用 Laplace 变换、Laplace 逆变换等方法求出了零利息和非零利息力下总索赔额 $X_{t,\theta}$ 的净保费表达式,最终得到 Esscher 定价泛函的表达式,推广了文献[6]的结论。

1　相依复合泊松过程及其矩母函数

在研究 Esscher 保费定价时,首先需要计算索赔额 X_t 的矩母函数。下文中我们假定:

A. 等待时间 $W_n, n\geqslant 1$ 独立同分布;

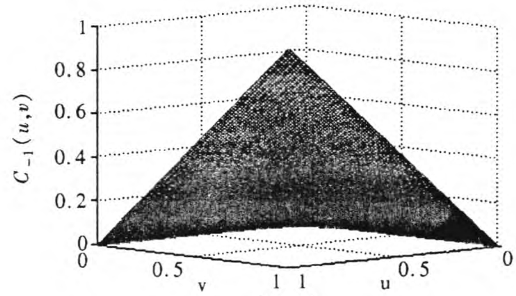
B. 等待时间的随机变量 W 服从指数分布,期望 $E[W]=1/\lambda$;

C. 索赔额 $Y_n, n\geqslant1$ 独立同分布,其累计分布函数 F 和概率密度函数 f 的值为正实数。且对应矩母函数 $M(h)=E[e^{hY}]<\infty, h\in R$;

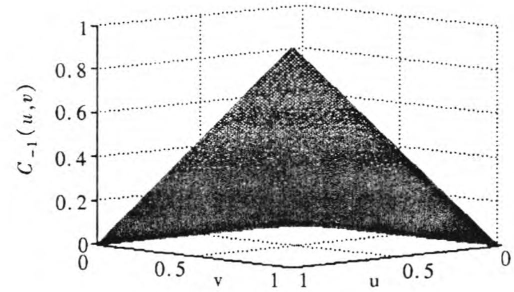
D. W_n、Y_n 之间的相依性用二元五次广义 Farlie-Gumbel-Morgenstern (FGM) Copula 来刻画:

$$C_\theta(u,v) = uv+\theta uv^2(1-u)(1-v),\quad -1\leqslant\theta\leqslant1$$

其中 $(u,v)\in[0,1]\times[0,1]$。图1为 θ 分别取 -1、0、1 的图像。



$\theta=-1$



$\theta=0$

收稿日期:2013-12-03
基金项目:国家自然科学基金项目(61203139);安徽省重点教研项目(2012jyxm277)
作者简介:方颢(1990-),男,安徽池州人,硕士生,主要研究方向为精算数学。
通讯作者:王传玉(1964-),男,安徽芜湖人,教授,主要研究方向为精算数学。

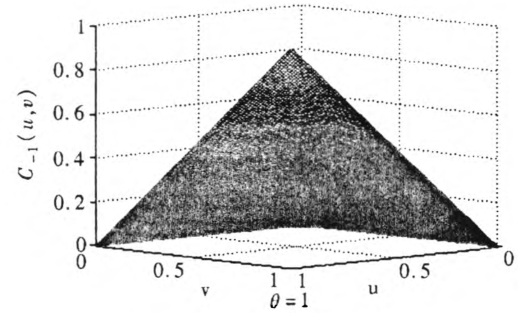


图1　不同 θ 下的 FGM Copula

Fig. 1　FGM Copula with different θ

为了区别相依和独立的复合泊松过程，本文用 $X_{t,\theta}$来表示前者，用 X_t 表示后者。

定义 1[8]　以 Y 表示单次索赔额的随机变量，其累积分布函数为 F，$w:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$是一个加权函数，使 $E[w(Y)]$有限且严格为正。定义加权分布函数为：

$$F_w(y) = \frac{E[1_{\{Y\leq y\}}w(Y)]}{E[w(Y)]}, y\in R$$

由文献[7]可知(W,Y)概率密度函数为

$$f_{W,Y}(w,y) = \lambda e^{-\lambda w}f(y) + \theta[f(y) - f_w(y)](4\lambda e^{-2\lambda w} - 3\lambda e^{-3\lambda w} - \lambda e^{-\lambda w})$$

其中$f_w(y)$是 Y 对应的加权概率密度函数，从上式可以看出$f_w(y)$和$f(y)$有很大差别，我们有以下命题：

命题 1[6]　设 $Y\sim F, Y_w\sim F_w, w(y)=2F(y)$，则 $M_w(h)=E[e^{hY_w}]\geqslant M(h), h\in R$。

基于假设 A－D，我们得到以下定理：

定理 1[7]　假设 A－D 成立，则相依复合泊松过程 $X_{t,\theta}$的矩母函数为

$$M_{X_{t,\theta}}(h) = \frac{[2\lambda + p_{1,\lambda,\theta}(h)][3\lambda + p_{1,\lambda,\theta}(h)]e^{p_{1,\lambda,\theta}(h)t}}{[p_{1,\lambda,\theta}(h) - p_{2,\lambda,\theta}(h)][p_{1,\lambda,\theta}(h) - p_{3,\lambda,\theta}(h)]} + \frac{[2\lambda + p_{2,\lambda,\theta}(h)][3\lambda + p_{2,\lambda,\theta}(h)]e^{p_{2,\lambda,\theta}(h)t}}{[p_{2,\lambda,\theta}(h) - p_{1,\lambda,\theta}(h)][p_{2,\lambda,\theta}(h) - p_{3,\lambda,\theta}(h)]} + \frac{[2\lambda + p_{3,\lambda,\theta}(h)][3\lambda + p_{3,\lambda,\theta}(h)]e^{p_{3,\lambda,\theta}(h)t}}{[p_{3,\lambda,\theta}(h) - p_{1,\lambda,\theta}(h)][p_{3,\lambda,\theta}(h) - p_{2,\lambda,\theta}(h)]}, h\in R \tag{1}$$

其中 $p_{1,\lambda,\theta}(h), p_{2,\lambda,\theta}(h), p_{3,\lambda,\theta}(h)$是方程 $p^3+bp^2+cp+d=0$ 的 3 个根，$b(h)=6\lambda-\lambda f^*(-h)$，$c(h)=11\lambda^2-5\lambda^2f^*(-h)-2\theta\lambda^2[f^*(-h)-f_w^*(-h)]$，$d(h)=6\lambda^3[1-f^*(-h)]$。

2　零利息力和非零利息力下的净保费

定理 2　通货膨胀和利率相等的零利息力下，净保费可以表示为

$$E[X_{t,\theta}] = E[N_t]E[Y] + 2\lambda\theta k[Y](\bar{a}_{t|2\lambda} - \bar{a}_{t|3\lambda}) \tag{2}$$

其中 $k[Y]=E[Y]-E[Y_w]$，$\bar{a}_{t|\delta}=(1-e^{-t\delta})/\delta$，$t>0, \delta>0$。

证明：当 $h=0$ 时，$E[X_{t,\theta}]=M'_{X_{t,\theta}}(0)$，$b(h)=5\lambda, c(h)=6\lambda^2, d(h)=0$。由根与系数关系得

$$\begin{cases} p_{1,\lambda,\theta}(h) + p_{2,\lambda,\theta}(h) + p_{3,\lambda,\theta}(h) = -5\lambda \\ p_{1,\lambda,\theta}(h)p_{2,\lambda,\theta}(h)p_{3,\lambda,\theta}(h) = 0 \\ p_{1,\lambda,\theta}(h)p_{2,\lambda,\theta}(h) + p_{1,\lambda,\theta}(h)p_{3,\lambda,\theta}(h) + p_{2,\lambda,\theta}(h)p_{3,\lambda,\theta}(h) = 6\lambda^2 \end{cases} \tag{3}$$

解得 $p_{1,\lambda,\theta}(0)=-2\lambda$，$p_{2,\lambda,\theta}(0)=-3\lambda$，$p_{3,\lambda,\theta}(0)=0$。对(3)式求导可得

$$p'_{1,\lambda,\theta}(0) = 2\lambda\theta k[Y]$$
$$p'_{2,\lambda,\theta}(0) = -2\lambda\theta k[Y]$$
$$p'_{3,\lambda,\theta}(0) = -2\lambda E[Y]$$

代入(1)式中求导得

$$M'_{X_{t,\theta}}(0) = \lambda tE[Y] + 2\lambda\theta k[Y](\bar{a}_{t|2\lambda} - \bar{a}_{t|3\lambda})$$

然而在很多现实情形中，我们需要考虑通货膨胀和利率组成的非零利息力。很多学者对非零利息力下的保费索赔进行了研究(例如，Léveillé 等[9-10])。对正利息力 δ，总索赔可记为

$$X_{t,\theta,\delta} = \sum_{j=1}^{N_t} e^{-\delta T_j}Y_j, N_t > 0$$

定理 3　设非零利息力为 δ，净保费可以表示为

$$E[X_{t,\theta,\delta}] = \lambda[E[Y]\bar{a}_{t|\delta} + 2\theta k[Y](\bar{a}_{t|2\lambda} - \bar{a}_{t|3\lambda})] \tag{4}$$

其中 $k[Y]=E[Y]-E[Y_w]$，$\bar{a}_{t|\delta}$表示利息力为 δ 的 t 年标准连续年金。

证明：由 Bargés[11] 的 3.1 节，得到 $X_{t,\theta,\delta}$的更新方程如下

$$E[X_{t,\theta,\delta}] = \bar{K}(t) + \int_0^t E[X_{t-w,\theta,\delta}]\lambda e^{-(\lambda+\delta)w}\mathrm{d}w$$

其中 $\bar{K}(t)=E[Ye^{-(\lambda+\delta)w}1(W<t)]$。

类似 Marri[6] 定理 2.1 的证明，运用 Volterra 积分方程的卷积形式，令 $G(t)=E[X_{t,\theta,\delta}]$可得

$$G(t) = \bar{K}(t) + \int_0^t G(t-w)g(w)\mathrm{d}w,$$
$$g(w) = \lambda e^{-(\lambda+\delta)w}$$
$$G^*(p) = \bar{K}^*(p) + \bar{K}^*(p)\frac{g^*(p)}{1-g^*(p)},$$

$$g^*(p) \neq 1$$

由假设 B 可知

$$G(t) = \bar{K}(t) + \int_0^t \bar{K}(t-w)\lambda e^{-\delta w)}\mathrm{d}w$$

$$E[X_{t,\theta,\delta}] = (1+\frac{\lambda}{\delta})E[Ye^{-\delta W}1\{W<t\}] - \frac{\lambda}{\delta}E[Y1\{W<t\}]$$

结合假设 D 得

$$E[X_{t,\theta,\delta}] = \lambda\{E[Y]\bar{a}_{t\delta} + 2\theta k[Y](\bar{a}_{\Omega\lambda+\delta} - \bar{a}_{t3\lambda+\delta})\}$$

注意到当利息力为 0 时，$\lim_{\delta\to 0^+}\bar{a}_{t\delta} = t$，我们有

$$E[X_{t,\theta}] = \lim_{\delta\to 0^+}E[X_{t,\theta,\delta}] = \lambda\{E[Y]t + 2\theta k[Y](\bar{a}_{\Omega\lambda} - \bar{a}_{t3\lambda})\}$$

即为(2)式。

3　Esscher 定价泛函

对索赔额和等待时间相依的复合泊松过程 $X_{t,\theta,\delta}$，非零利息力下 Esscher 定价泛函定义为

$$\prod_h[X_{t,\theta,\delta}] = \frac{E[X_{t,\theta,\delta}e^{hX_{t,\theta,\delta}}]}{E[e^{hX_{t,\theta,\delta}}]}, h \geqslant 0 \quad (5)$$

易知，$\lim\prod_h[X_{t,\theta,\delta}] = E[X_{t,\theta,\delta}]$；且当 $h \geqslant 0$，Esscher 定价泛函值是非负的。事实上，由 $X_{t,\theta,\delta}$ 和 $e^{hX_{t,\theta,\delta}}$ 正象限相关，有

$$\prod_h[X_{t,\theta,\delta}] = \frac{E[X_{t,\theta,\delta}e^{hX_{t,\theta,\delta}}]}{E[e^{hX_{t,\theta,\delta}}]} \geqslant \frac{E[X_{t,\theta,\delta}]E[e^{hX_{t,\theta,\delta}}]}{E[e^{hX_{t,\theta,\delta}}]} = E[X_{t,\theta,\delta}]$$

定理 4　设 $X_{t,\theta,\delta}$ 满足假设 A－D，记

$$M_{X_{t,\theta,\delta}}(h) = \sum_{j=1}^{3} A_{j,\lambda,\theta,\delta}(h)e^{p_{j,\lambda,\theta,\delta}(h)t}, h \in R \quad (6)$$

$$B_{j,\lambda,\theta,\delta,t} = A'_{j,\lambda,\theta,\delta}(h) + A_{j,\lambda,\theta,\delta}(h)p'_j(h)t, \quad j = 1,2,3$$

则 $X_{t,\theta,\delta}$ 的 Esscher 定价泛函可以表示为

$$\prod_h[X_{t,\theta,\delta}] = \frac{\sum_{j=1}^{3} B_{j,\lambda,\theta,\delta}(h)e^{p_{j,\lambda,\theta,\delta}(h)t}}{\sum_{j=1}^{3} A_{j,\lambda,\theta,\delta}(h)e^{p_{j,\lambda,\theta,\delta}(h)t}} \quad (7)$$

证明：对 $X_{t,\theta,\delta}$ 关于 h 求导得

$$\frac{\mathrm{d}M_{X_{t,\theta,\delta}}(h)}{\mathrm{d}h} = A'_{j,\lambda,\theta,\delta}(h)e^{p_j}(h)t + A_{j,\lambda,\theta,\delta}(h)e^{p_j}(h)tp'_j(h)t$$

将(6)式以及 $\prod_h[X_{t,\theta,\delta}] = \frac{\mathrm{d}h}{M_{X_{t,\theta,\delta}}(h)}$ 代入(5)式即得到(7)。

4　结论

本文考虑索赔额和等待时间是相依复合泊松过程的情形，两者之间相依性由广义 FGM Copula 来刻画。仿造文献[6]的方法，利用 Laplace 变换，Volterra 积分方程的卷积形式，Laplace 逆变换等方法求解出零利息力和非零利息力下净保费的表达式，最后给出了其Esscher定价泛函的表达式。

参考文献：

[1] Cossette H, Marceau E, Marri F. On the Compound Poisson Risk Model with Dependence Based on a Generalized Farlie－Gumbel－Morgenstern Copula[J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2008,43(3):444－455.

[2] Albreeher H, Boxma O. J. A Ruin Model with Dependence Between Claim Sizes and Claim Intervals[J]. Insurance: Mathematics and Economics 2004,35(2):245－254.

[3] Albreeher H, Teugels J. Exponential Behavior in the Presence of Dependence in Risk Theory[J]. J. Appl. Prob,2006,43(1):265－285.

[4] Nelson R B. An introduction to Copulas[M]. New York: Springer, 1999.

[5] 徐付霞，董永权. FGM Copula 的另一种拓展[J]. 应用数学,2011,24(1):84－90.

[6] Marri F, Furman E. Pricing compound Poisson processes with the Farlie－Gambel－Morgenstern dependence structure [J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2012, 51(1): 151－157.

[7] 方颢，王传玉，张大伟. 具有广义 FGM 相依结构的复合泊松过程的 Esscher 定价泛函[J]. 数学理论与应用,2013,33(3):76－81.

[8] Furman E, Zitikis R. Weighted premium calculation principlesp[J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2008,42(3):459－465.

[9] Léveillé G, Garrido J. Moments of compound renewal sums with discounted claims[J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2001,28(2):217-231.

[10] Léveillé G, Garrido J, Wang Y F. Moment generating functions of compound renewal sums with discounted claims[J]. Scandinavian Actuarial Journal,2009,2(1):98-110.

[11] Bargés M, Cossette H, Loisel S, et al. On the moments of the aggregate discounted claims with dependence introduced by an FGM copula[J]. ASTIN Bulletin,2011,41(1):215-238.

The Net Premium for a Compound Poisson Process with Generalized Farlie - Gumbel - Morgenstern Dependence Structure

FANG Hao, WANG Chuanyu, DAI Zexing

(Coll. of Math. and Pht., Anhui Polytechnic University, Wuhu Anhui 241000, China)

Abstract: In this paper we find the moment generating function of the total claim with the net premium under both zero interest force and nonzero interest force for a compound Poisson processes with dependent loss amounts and loss inter-arrival times having a generalized Farlie-Gumbel-Morgenstern Copula dependence structure. Finally we obtain the expressions for the Esscher pricing function.

Keywords: FGM Copula; Compound Poisson Processes; Net Premium

(责任编辑:张英健)

(上接第4页)

Optimization of Protease Production Fermentation Conditions by Trichosporon Capitatum

GAO Dawei[1], SONG Xiaolei[1], ZOU Xin[1], YUAN Bianbian[1], ZHENG Laijiu[2], WANG Lili[1]

(1. Colleage of Textile and Clothing, Yancheng Institute of Technology, Yancheng Jiangsu 224051, China;
2. School of Textile and Material Engineering, Dalian Polytechnic University, Dalian Liaoning 116034, China)

Abstract: In order to improve the quality of wool washing and get the environmentally friendly wool washing method, trichosporon capitatum fermentation conditions of lipase production were studied. Soluble starch, soybean meal and $(NH_4)_2SO_4$ were screened out as the most suitable carbon and nitrogen sources using single factor experiment. The optimal fermentation concentrations were determined, they were: initial pH 6.5, the best fluid volume in 250 mL conical flask 30 mL, fermentation temperature 28 ℃, rotating speed 160r/min, olive oil 5 g/L, Tween-80 1.5 g/L.

Keywords: wool scouring; trichosporon capitatum; fermentation; Lipase

(责任编辑:李华云)