一类索赔相依二元风险模型下第 n 次索赔时的破产概率研究

田　飞,王传玉,张大伟
(安徽工程大学 数理学院,安徽 芜湖　241000)

摘要:在一类索赔相依二元风险模型下推导出了 Gerber - Shiu 函数满足的更新方程,以及破产时刻和直到破产时刻的索赔次数的联合密度函数,得到了第 n 次索赔时的破产概率的表达式。

关键词:二元风险模型;索赔次数;Laplace 变换;破产概率
中图分类号:O211.9　　**文献标识码**:A　　**文章编号**:1671 - 5322(2014)02 - 0011 - 05

经典风险模型中,保险公司只面对单风险的情形;但现实生活中,保险公司会承担不同的保险业务,为了使风险模型更符合实际情况,赵晓芹[1]、张冕[2]等研究了一类索赔相依的二元风险模型的破产问题,此风险模型包含两种索赔:主索赔和由主索赔引起的副索赔;得到了此风险模型下生存概率所满足的微分方程,最后得到了最终破产概率渐进表达式,但是他们的文章中都没有涉及到索赔次数与破产时间之间的关系的问题,也没有考虑使用近年来被广泛使用的 Gerber - Shiu 函数来研究破产概率问题。而保险公司的风险来源主要是发生索赔的次数和发生索赔时的索赔额,确保保险公司稳定经营的一个重要衡量指标是破产概率,但是很少有学者对破产索赔次数与破产时间之间的关系进行研究。因此,将索赔次数和破产时间放在一起研究是一个比较新的和有意义的问题。

1998 年 Gerber and Shiu[3]定义了著名的期望折现罚金函数,后来被称之为 Gerber - Shiu 函数,他们首次把破产时间、破产前瞬时盈余和破产时刻赤字这 3 个重要精算变量嵌入到一个期望折现罚金函数中,通过求解该函数来研究三者的联合分布;近年来,破产时刻罚金折现期望已被用于一些实用的风险模型并由此产生了许多风险理论的新结论;Landriault[4]在 2011 年的文章中研究了服从指数索赔量的 Sparre Andersen 风险模型,使用 Gerber - Shiu 函数,他们推导出了 Sparre Andersen 风险模型下破产时刻和破产索赔次数的联合分布,并在服从指数索赔量的假设下推导出了含索赔次数的破产概率的表达式,这篇文章中的一个重要的想法就是一些关于破产时间的已知结果可以用破产时的索赔次数来解释;Dickson[5]在 2012 年的文章中使用概率论证的方法推导出了经典风险模型下破产时刻和破产索赔次数的联合分布,获得了破产索赔次数的概率函数的一般表达式。

本文在 Dickson[5]的文章的基础上,研究了一类索赔相依二元风险模型下 Gerber - Shiu 函数满足的更新方程,推导出了一类索赔相依二元风险模型下破产时刻和直到破产时刻的索赔次数的联合密度函数,得到了第 n 次索赔时的破产概率的数学表达式。

1　预备知识

定义 1　称 $p_n(u)$ 为初始盈余为 u 时,第 n 次索赔时的破产概率,即

$$p_n(u) = \int_0^\infty \omega_n(u,t)\,\mathrm{d}t$$

其中 T_u 表示初始盈余为 u 时的破产时刻,即 $T_u = \inf\{t: U(t) \leqslant 0\}$;$\omega(u,t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\psi(u,t)$ 表示破产时刻的缺陷密度;N_{T_u} 表示直到破产发生时的索赔次

收稿日期:2014 - 01 - 10
基金项目:国家自然科学基金项目(61203139);安徽省重点教研项目(2012jyxm277)
作者简介:田飞(1988 -),男,湖南怀化人,硕士生,主要研究方向为精算数学。

数;$\omega_n(u,t)$表示初始盈余为 u 时,T_u 和 N_{T_u} 的联合密度函数。

定义 2 由 Dickson[5] 我们定义了如下的 Gerber - Shiu 函数:

$$\phi_{r,\delta}(u) = E[r^{N_{T_u}}e^{-\delta T_u}I(T_u < \infty)] = \sum_{n=1}^{\infty} r^n\int_0^{\infty} e^{-\delta t}\omega_n(u,t)\mathrm{d}t \qquad (1)$$

其中 $0<r\leqslant 1,\delta\geqslant 0,I$ 为示性函数。

2 独立二元风险模型的破产概率

2.1 模型的建立

定义如下的盈余过程:

$$U(t) = u + ct - S(t) = u + ct - \sum_{i=1}^{N_1(t)} X_i - \sum_{i=1}^{N_2(t)} Y_i$$

其中 $u\geqslant 0$ 是常数,表示初始盈余;c 为单位时间内的保费收入;$\{S(t),t\geqslant 0$ 为总损失过程;X_i 为第一类风险第 i 次索赔时的索赔额,$\{X_i\}_1^{\infty}$ 为一系列独立同分布的随机变量,其分布函数为 $F(x)$;Y_i 为第二类风险第 i 次索赔时的索赔额,$\{Y_i\}_1^{\infty}$ 为一系列独立同分布的随机变量,其分布函数为 $G(y)$;$N_1(t)$ 和 $N_2(t)$ 分别为两类风险的索赔计数过程,令 $N_1(t)$ 是服从参数为 λ_1 的 Poisson 过程,$N_2(t)$ 服从参数为 λ_2 的 Poisson 过程。假设两类险种之间是相互独立的,则称上面所定义盈余过程的风险模型为独立二元风险模型。

2.2 破产概率的求解

本节将在 2.1 所述独立二元风险模型下,根据(1)式,求出 Gerber - Shiu 函数满足的更新方程,进而求出破产概率。

考虑时间区间$(0,T)$,其中 $t<T$,设如果有索赔发生,则在 t 时刻发生首次索赔,索赔额为 x,则由文献[3]可得:

$$\begin{aligned}\phi_{r,\delta}(u) &= e^{-\lambda_1 T}e^{-\lambda_2 T}e^{-\delta T}\phi_{r,\delta}(u+cT) + \\ &\int_0^T r\lambda_1 e^{-\lambda_1 t}e^{-\lambda_2 t}e^{-\delta t}\int_0^{u+ct}\phi_{r,\delta}(u+ct-x)f(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}t + \\ &\int_0^T r\lambda_1 e^{-\lambda_1 t}e^{-\lambda_2 t}e^{-\delta t}\int_{u+ct}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}t + \\ &\int_0^T r\lambda_2 e^{-\lambda_1 t}e^{-\lambda_2 t}e^{-\delta t}\int_0^{u+ct}\phi_{r,\delta}(u+ct-y)g(y)\mathrm{d}y\mathrm{d}t + \\ &\int_0^T r\lambda_2 e^{-\lambda_1 t}e^{-\lambda_2 t}e^{-\delta t}\int_{u+ct}^{\infty} g(y)\mathrm{d}y\mathrm{d}t \end{aligned} \qquad (2)$$

两边同时对 T 求微分,再令 $T=0$,则有:

$$\begin{aligned}\phi'_{r,\delta}(u) &= \frac{\lambda_1+\lambda_2+\delta}{c}\phi_{r,\delta}(u) - \frac{\lambda_1}{c}\int_0^u\phi_{r,\delta}(u-x)f(x)\mathrm{d}x - \\ &\frac{\lambda_2}{c}\int_0^u\phi_{r,\delta}(u-y)g(y)\mathrm{d}y - \frac{\lambda_1 r}{c}\overline{F}(u) - \frac{\lambda_2 r}{c}\overline{G}(u)\end{aligned} \qquad (3)$$

这样我们就得到了独立二元风险模型下 Gerber - Shiu 函数满足的更新方程。

又由文献[6]可知,存在一个 s 满足以下鞅条件:

$$E[e^{-\delta t}e^{sU(t)} \mid U(0) = u] = e^{su}$$

由这个条件我们可以得到独立二元风险模型下的广义 Lundberg 方程:

$$cs - (\lambda_1+\lambda_2+\delta) + \lambda_1\tilde{f}(s) + \lambda_2\tilde{g}(s) = 0 \qquad (4)$$

注 1:$\overline{F}(x) = \int_x^{\infty} f(y)\mathrm{d}y$。

注 2:$f(x)$ 的 Laplace 变换表示为:$\tilde{f}(\xi) = \int_0^{\infty} e^{-\xi x}f(x)\mathrm{d}x$。

定理 1 当 $u=0$ 时,独立二元风险模型第 n 次索赔时的破产概率为:

$$p_1(0,t) = \int_0^{\infty} e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}[\lambda_1\overline{F}(ct) + \lambda_2\overline{G}(ct)]\mathrm{d}t,\quad n = 1 \qquad (5)$$

$$\begin{aligned}p_n(0,t) = &\int_0^{\infty} e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}\frac{\lambda_1^n t^{n-1}}{(n-1)!}\Big[\int_0^{ct}\frac{x}{ct}f^{*(n-1)}(ct-x)\overline{F}(x)\mathrm{d}x + \\ &\int_0^{ct}\frac{y}{ct}f^{*(n-1)}(ct-y)\overline{G}(y)\mathrm{d}y\Big]\mathrm{d}t + \\ &\int_0^{\infty} e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}\frac{\lambda_2^n t^{n-1}}{(n-1)!}\Big[\int_0^{ct}\frac{y}{ct}g^{*(n-1)}(ct-y)\overline{G}(y)\mathrm{d}y + \\ &\Big[\int_0^{ct}\frac{x}{ct}g^{*(n-1)}(ct-x)\overline{F}(x)\mathrm{d}x\Big]\mathrm{d}t \\ &n = 2,3,\cdots\end{aligned} \qquad (6)$$

证明:对(3)式两边同时作 Laplace 变换,有:

$$\begin{aligned}&[cs - (\lambda_1+\lambda_2+\delta) + r\lambda_1\tilde{f}(s) + r\lambda_2\tilde{g}(s)]\tilde{\phi}_{r,\delta}(s) = \\ &c\phi_{r,\delta}(0) - r\lambda_1\int_0^{\infty} e^{-su}\overline{F}(u)\mathrm{d}u - r\lambda_2\int_0^{\infty} e^{-su}\overline{G}(u)\mathrm{d}u\end{aligned} \qquad (7)$$

由文献[3]和文献[6]可知,存在一个 ρ,ρ 使得方程

$$cs - (\lambda_1+\lambda_2+\delta) + r\lambda_1\tilde{f}(s) + r\lambda_2\tilde{g}(s) = 0$$

有唯一正解,将 ρ 代入(7)式,这样就有

$$\phi_{r,\delta}(0) = \frac{r\lambda_1}{c}\int_0^{\infty} e^{-\rho u}\overline{F}(u)\mathrm{d}u + \frac{r\lambda_2}{c}\int_0^{\infty} e^{-\rho u}\overline{G}(u)\mathrm{d}u \qquad (8)$$

由文献[4]可知:

$$e^{-\rho t}=$$

$$e^{-\frac{\lambda+\delta}{c}t}+\sum_{n=1}^{\infty}r^n\frac{(\frac{\lambda_1}{c})^n}{n!}t\int_0^{\infty}(x+t)^{n-1}e^{-\frac{\lambda_1+\lambda_2+\delta}{c}(x+t)}f^{*n}(x)\mathrm{d}x+$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}r^n\frac{(\frac{\lambda_2}{c})^n}{n!}t\int_0^{\infty}(x+t)^{n-1}e^{-\frac{\lambda_1+\lambda_2+\delta}{c}(x+t)}g^{*n}(y)\mathrm{d}y \quad (9)$$

将(9)代入(8)式,化简整理可得:

$$\phi_{r,\delta}(0)=\int_0^{\infty}re^{-\delta t}e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}[\lambda_1\overline{F}(ct)+\lambda_2\overline{G}(ct)]\mathrm{d}t+$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}\int_0^{\infty}r^ne^{-\delta t}e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}\Big[\frac{{\lambda_1}^nt^{n-1}}{(n-1)!}\int_0^{ct}\frac{x}{ct}f^{*(n-1)}(ct-x)\overline{F}(x)\mathrm{d}x+$$

$$\frac{{\lambda_2}^nt^{n-1}}{(n-1)!}\int_0^{ct}\frac{x}{ct}g^{*(n-1)}(ct-x)\overline{F}(x)\mathrm{d}x\Big]\mathrm{d}t+$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}\int_0^{\infty}r^ne^{-\delta t}e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}\Big[\frac{{\lambda_2}^nt^{n-1}}{(n-1)!}\int_0^{ct}\frac{y}{ct}g^{*(n-1)}(ct-y)\overline{G}(y)\mathrm{d}y+$$

$$\frac{{\lambda_1}^nt^{n-1}}{(n-1)!}\int_0^{ct}\frac{y}{ct}f^{*(n-1)}(ct-y)\overline{G}(y)\mathrm{d}y\Big]\mathrm{d}t \quad (10)$$

又

$$\phi_{r,\delta}(u)=\sum_{n=1}^{\infty}r^n\int_0^{\infty}e^{-\delta t}\omega_n(u,t)\mathrm{d}t$$

当 $u=0$ 时,我们可以得到:

$$\omega_1(0,t)=e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}[\lambda_1\overline{F}(ct)+\lambda_2\overline{G}(ct)],\quad n=1 \quad (11)$$

$$\omega_n(0,t)=$$

$$e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}\Big[\frac{{\lambda_1}^nt^{n-1}}{(n-1)!}\Big[\int_0^{ct}\frac{x}{ct}f^{*(n-1)}(ct-x)\overline{F}(x)\mathrm{d}x+\int_0^{ct}\frac{y}{ct}f^{*(n-1)}(ct-y)\overline{G}(y)\mathrm{d}y\Big]+$$

$$e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}\Big[\frac{{\lambda_2}^nt^{n-1}}{(n-1)!}\Big[\int_0^{ct}\frac{y}{ct}g^{*(n-1)}(ct-y)\overline{G}(y)\mathrm{d}y+\int_0^{ct}\frac{x}{ct}g^{*(n-1)}(ct-x)\overline{F}(x)\mathrm{d}x\Big]$$

$$n=2,3,\cdots \quad (12)$$

从而 $u=0$ 时破产概率为:

$$p_1(0,t)=\int_0^{\infty}e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}[\lambda_1\overline{F}(ct)+\lambda_2\overline{G}(ct)]\mathrm{d}t$$

$$p_n(0,t)=$$

$$\int_0^{\infty}e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}\frac{{\lambda_1}^nt^{n-1}}{(n-1)!}\Big[\Big[\int_0^{ct}\frac{x}{ct}f^{*(n-1)}(ct-x)\overline{F}(x)\mathrm{d}x+\int_0^{ct}\frac{y}{ct}f^{*(n-1)}(ct-y)\overline{G}(y)\mathrm{d}y\Big]\mathrm{d}t+$$

$$\int_0^{\infty}e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}\frac{{\lambda_2}^nt^{n-1}}{(n-1)!}\Big[\Big[\int_0^{ct}\frac{y}{ct}g^{*(n-1)}(ct-y)\overline{G}(y)\mathrm{d}y+\int_0^{ct}\frac{x}{ct}g^{*(n-1)}(ct-x)\overline{F}(x)\mathrm{d}x\Big]\mathrm{d}t$$

对于 $u>0$ 的情形,我们将在下一节讨论一类相依二元风险模型时进行分析,两种模型关于 $u>0$ 的情形下破产概率的求解方法是类似的。

3 一类索赔相依情形下的二元风险模型的破产概率

3.1 模型的建立

考虑一类二元风险模型,包含两种索赔:主索赔和由主索赔引起的副索赔。设 X_i 为主索赔第 i 次索赔时的索赔额,$\{X_i\}_1^{\infty}$ 为一系列独立同分布的随机变量,其分布函数为 $F(x)$;Y_i 为副索赔第 i 次索赔时的索赔额,$\{Y_i\}_1^{\infty}$ 为一系列独立同分布的随机变量,其分布函数为 $G(y)$。设每一次主索赔以概率 α 引起一次副索赔,以概率 $1-\alpha$ 不引起副索赔;副索赔以概率 β 与引起它的主索赔同时发生,以概率 $1-\beta$ 与引起它的主索赔不同时发生。此模型的盈余过程可表示为:

$$U(t)=u+ct-\sum_{i=1}^{N_1(t)}X_i-\sum_{i=1}^{N_2(t)}Y_i$$

其中 $u\geqslant0$ 为常数,表示初始盈余;c 为单位时间内的保费收入;$N_1(t)$ 为主索赔发生的次数,它服从参数为 λ 的 Poisson 过程;$N_2(t)$ 为副索赔发生的次数。

3.2 破产概率的求解

要求解 3.1 所述风险模型下的破产概率,我们先求出 Gerber - Shiu 函数满足的更新方程,以这个更新方程为基础,求出 $u=0$ 和 $u>0$ 两种情形下的破产概率的表达式。

引理 1　3.1 所述二元风险模型下 Gerber - Shiu 函数满足的更新方程为:

$$\phi'_{r,\delta}(u)=\frac{\lambda+\delta}{c}\phi_{r,\delta}(u)-\frac{\lambda r(1-\alpha\beta)}{c}\int_0^u\phi_{r,\delta}(u-x)f(x)\mathrm{d}x-\frac{\lambda r(1-\alpha\beta)}{c}\overline{F}(u)-\frac{\lambda r\alpha\beta}{c}\int_0^u\phi_{r,\delta}(u-y)\mathrm{d}F^*G(y)-\frac{\lambda r\alpha\beta}{c}\int_u^{\infty}\mathrm{d}F^*G(y) \quad (13)$$

证明:考虑一个很小的时间区间 $(0,h)$,其中 $t<h$,如果有索赔发生,则在 t 时刻发生首次索赔,索赔额为 x,可以分几种情形讨论:

(1)在 $(0,h)$ 上没有索赔发生;

(2)在 $(0,h)$ 上主索赔发生,且不引起副索赔发生;

(3)在$(0,h)$上主索赔发生,且引起副索赔发生,且副索赔与主索赔同时发生;

(4)在$(0,h)$上主索赔发生,且引起副索赔发生,且副索赔与主索赔不同时发生;

综上所述可得:

$$\phi_{r,\delta}(u) = e^{-\lambda h}e^{-\delta h}\phi_{r,\delta}(u+ch) + \int_0^h r\lambda e^{-\lambda t}e^{-\delta t}(1-\alpha)\int_0^{u+ct}\phi_{r,\delta}(u+ct-x)f(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}t + \int_0^h r\lambda e^{-\lambda t}e^{-\delta t}(1-\alpha)\int_{u+ct}^{\infty}f(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}t + \int_0^h r\lambda e^{-\lambda t}e^{-\delta t}\alpha\beta\int_0^u\phi_{r,\delta}(u+ct-y)\mathrm{d}F^*G(y)\mathrm{d}t + \int_0^h r\lambda e^{-\lambda t}e^{-\delta t}\alpha\beta\int_{u+ct}^{\infty}\mathrm{d}F^*G(y)\mathrm{d}t + \int_0^h r\lambda e^{-\lambda t}e^{-\delta t}\alpha(1-\beta)\int_0^{u+ct}\phi_{r,\delta}(u+ct-x)f(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}t + \int_0^h r\lambda e^{-\lambda t}e^{-\delta t}\alpha(1-\beta)\int_{u+ct}^{\infty}f(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}t$$

两边对h求微分,然后令$h=0$,得:

$$0 = -(\lambda+\delta)\phi_{r,\delta}(u) + c\phi'_{r,\delta}(u) + r\lambda(1-\alpha)\int_0^u\phi_{r,\delta}(u-x)f(x)\mathrm{d}x + r\lambda(1-\alpha)\int_u^{\infty}f(x)\mathrm{d}x + r\lambda\alpha\beta\int_0^u\phi_{r,\delta}(u-y)\mathrm{d}F^*G(y) + r\lambda\alpha\beta\int_u^{\infty}\mathrm{d}F^*G(y) + r\lambda\alpha(1-\beta)\int_0^u\phi_{r,\delta}(u-x)f(x)\mathrm{d}x + r\lambda\alpha(1-\beta)\int_u^{\infty}f(x)\mathrm{d}x$$

整理,即得证。

引理2 3.1所述二元风险模型下的Lundberg方程为:

$$cs-(\lambda+\delta)+\lambda(1-\alpha\beta)\tilde{f}(s)+\lambda\alpha\beta f^*g(s)=0 \tag{14}$$

证明:由文献[6]可知,存在一个s满足以下鞅条件:

$$E[e^{-\delta t}e^{sU(t)}\mid U(0)=u]=e^{su}$$

由

$$E[e^{-\delta t}e^{sU(t)}\mid U(0)=u] = E[e^{-\delta t}e^{s(u+ct-\sum_{i=1}^{N_1(t)}X_i-\sum_{i=1}^{N_2(t)}Y_i)}] = E[e^{-\delta t}e^{s(u+ct)}e^{-s(1-\alpha)S_X(t)}e^{-s\alpha\beta S_{XY}(t)}e^{-s\alpha(1-\beta)S_X(t)}] = e^{su}e^{(cs-\delta)t}e^{\lambda t(1-\alpha)[M_X(-s)-1]}e^{\lambda t\alpha\beta[M_{XY}(-s)-1]}e^{\lambda t\alpha(1-\beta)[M_X(-s)-1]} = e^{su}e^{(cs-\delta)t}e^{\lambda t(1-\alpha)[\tilde{f}(s)-1]}e^{\lambda t\alpha\beta[f^*g(s)-1]}e^{\lambda t\alpha(1-\beta)[\tilde{f}(s)-1]} = e^{su}e^{[cs-(\lambda+\delta)+\lambda(1-\alpha\beta)\tilde{f}(s)+\lambda\alpha\beta f^*g(s)]t}$$

故

$$cs-(\lambda+\delta)+\lambda(1-\alpha\beta)\tilde{f}(s)+\lambda\alpha\beta f^*g(s)=0$$

定理2 当$u=0$时,3.1所述二元风险模型下第n次索赔时的破产概率为

$$p_1(0,t) = \int_0^{\infty}\lambda(1-\alpha\beta)e^{-\lambda t}\overline{F}(ct)\mathrm{d}t + \int_0^{\infty}\lambda\alpha\beta e^{-\lambda t}\,\overline{F^*G(ct)}\mathrm{d}t,\quad n=1 \tag{15}$$

$$p_n(0,t) = \int_0^{\infty}\left\{(1-\alpha\beta)e^{-\lambda t}\frac{\lambda^n t^{n-1}}{(n-1)!}\left[(1-\alpha\beta)\int_0^{ct}\frac{x}{ct}f^{*(n-1)}(ct-x)\overline{F}(x)\mathrm{d}x + \alpha\beta\int_0^{ct}\frac{x}{ct}(f^*g)^{*(n-1)}(ct-x)\overline{F}(x)\mathrm{d}x\right]\right\}\mathrm{d}t + \int_0^{\infty}\left\{\alpha\beta e^{-\lambda t}\frac{\lambda^n t^{n-1}}{(n-1)!}\left[(1-\alpha\beta)\int_0^{ct}\frac{y}{ct}f^{*(n-1)}(ct-y)\overline{F^*G(y)}\mathrm{d}y + \alpha\beta\int_0^{ct}\frac{y}{ct}(f^*g)^{*(n-1)}(ct-y)\overline{F^*G(y)}\mathrm{d}y\right]\right\}\mathrm{d}t$$

$$n=2,3,\cdots \tag{16}$$

证明:对引理1的(13)式作Laplace变换得:

$$[cs-(\lambda+\delta)+r\lambda(1-\alpha\beta)\tilde{f}(s)+r\lambda\alpha\beta f^*g(s)]\hat{\phi}_{r,\delta}(s) = c\phi_{r,\delta}(0) - r\lambda(1-\alpha\beta)\int_0^{\infty}e^{-su}\overline{F}(u)\mathrm{d}u - r\lambda\alpha\beta\int_0^{\infty}e^{-su}\,\overline{F^*G(u)}\mathrm{d}u \tag{17}$$

由文献[3]和文献[6]可知,存在一个ρ,ρ使得方程

$$cs-(\lambda+\delta)+r\lambda(1-\alpha\beta)\tilde{f}(s)+r\lambda\alpha\beta f^*g(s)=0$$

有唯一正解,将ρ代入(17)式时,我们有:

$$\phi_{r,\delta}(0) = \frac{r\lambda(1-\alpha\beta)}{c}\int_0^{\infty}e^{-\rho u}\overline{F}(u)\mathrm{d}u + \frac{r\lambda\alpha\beta}{c}\int_0^{\infty}e^{-\rho u}\,\overline{F^*G(u)}\mathrm{d}u \tag{18}$$

又由文献[4]可知:

$$e^{-\rho t} = e^{-\frac{\lambda+\delta}{c}t} + (1-\alpha\beta)\sum_{n=1}^{\infty}r^n\frac{(\frac{\lambda}{c})^n}{n!}t\int_0^{\infty}(x+t)^{n-1}e^{-\frac{\lambda+\delta}{c}(x+t)}f^{*n}(x)\mathrm{d}x + \alpha\beta\sum_{n=1}^{\infty}r^n\frac{(\frac{\lambda}{c})^n}{n!}t\int_0^{\infty}(x+t)^{n-1}e^{-\frac{\lambda+\delta}{c}(x+t)}(f^*g)^{*n}(x)\mathrm{d}x$$

代入(18)式,整理可得:

$$\phi_{r,\delta}(0) = \int_0^{\infty}\left\{r\lambda(1-\alpha\beta)e^{-\delta t}e^{-\lambda t}\overline{F}(ct) + r\lambda\alpha\beta e^{-\delta t}e^{-\lambda t}\,\overline{F^*G(ct)}\right\}\mathrm{d}t + \sum_{n=2}^{\infty}\int_0^{\infty}r^n e^{-\delta t}e^{-\lambda t}(1-\alpha\beta)\frac{\lambda^n t^{n-1}}{(n-1)!}\left[(1-\alpha\beta)\int_0^{ct}\frac{x}{ct}f^{*(n-1)}(ct-x)\overline{F}(x)\mathrm{d}x + \right.$$

$$\alpha\beta\int_0^{ct}\frac{x}{ct}(f^*g)^{*(n-1)}(ct-x)\bar{F}(x)\mathrm{d}x\Big]\mathrm{d}t+$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}\int_0^{\infty}r^n\alpha\beta e^{-\delta t}e^{-\lambda t}\frac{\lambda^n t^{n-1}}{(n-1)!}\Big[(1-$$

$$\alpha\beta)\int_0^{ct}\frac{y}{ct}f^{*(n-1)}(ct-y)\,\overline{F^*G(y)}(x)\mathrm{d}y+$$

$$\alpha\beta\int_0^{ct}\frac{y}{ct}(f^*g)^{*(n-1)}(ct-y)\,\overline{F^*G(y)}\mathrm{d}y\Big]\mathrm{d}t$$

由(1)式可得：

$$\omega_1(0,t)=$$
$$\lambda(1-\alpha\beta)e^{-\lambda t}\bar{F}(ct)+\lambda\alpha\beta e^{-\lambda t}\,\overline{F^*G(ct)}$$
$$n=1 \tag{19}$$

$$\omega_n(0,t)=$$
$$(1-\alpha\beta)e^{-\lambda t}\frac{\lambda^n t^{n-1}}{(n-1)!}\Big[(1-\alpha\beta)\int_0^{ct}\frac{x}{ct}f^{*(n-1)}(ct-x)\bar{F}(x)\mathrm{d}x+$$
$$\alpha\beta\int_0^{ct}\frac{x}{ct}(f^*g)^{*(n-1)}(ct-x)\bar{F}(x)\mathrm{d}x\Big]+$$
$$\alpha\beta e^{-\lambda t}\frac{\lambda^n t^{n-1}}{(n-1)!}\Big[(1-\alpha\beta)\int_0^{ct}\frac{y}{ct}f^{*(n-1)}(ct-y)\,\overline{F^*G(y)}\mathrm{d}y+$$
$$\alpha\beta\int_0^{ct}\frac{y}{ct}(f^*g)^{*(n-1)}(ct-y)\,\overline{F^*G(y)}\mathrm{d}y\Big]$$
$$n=2,3,\cdots \tag{20}$$

从而有

$$p_1(0,t)=$$
$$\int_0^{\infty}\lambda(1-\alpha\beta)e^{-\lambda t}\bar{F}(ct)\mathrm{d}t+\int_0^{\infty}\lambda\alpha\beta e^{-\lambda t}\,\overline{F^*G(ct)}\mathrm{d}t$$

$$p_n(0,t)=$$
$$\int_0^{\infty}\Big\{(1-\alpha\beta)e^{-\lambda t}\frac{\lambda^n t^{n-1}}{(n-1)!}\Big[(1-\alpha\beta)\int_0^{ct}\frac{x}{ct}f^{*(n-1)}(ct-x)\bar{F}(x)\mathrm{d}x+$$
$$\alpha\beta\int_0^{ct}\frac{x}{ct}(f^*g)^{*(n-1)'}(ct-x)\bar{F}(x)\mathrm{d}x\Big]\Big\}\mathrm{d}t+$$
$$\int_0^{\infty}\Big\{\alpha\beta e^{-\lambda t}\frac{\lambda^n t^{n-1}}{(n-1)!}\Big[(1-\alpha\beta)\int_0^{ct}\frac{y}{ct}f^{*(n-1)}(ct-y)\,\overline{F^*G(y)}\mathrm{d}y+$$
$$\alpha\beta\int_0^{ct}\frac{y}{ct}(f^*g)^{*(n-1)}(ct-y)\,\overline{F^*G(y)}\mathrm{d}y\Big]\Big\}\mathrm{d}t$$

对于 $u>0$ 的情形，由文献[7]可知，对于一个很小的 $\mathrm{d}t$，$\omega_1(u,t)\mathrm{d}t$ 表示在区间 $(t,t+\mathrm{d}t)$ 上发生首次索赔且导致破产发生的概率；对于这个事件，我们可以知道在时刻 t 之前没有索赔发生，在区间 $(t,t+\mathrm{d}t)$ 上有一次索赔发生，且索赔额超过 $u+ct$，因此，由文献[7]可知：

$$\omega_1(u,t)=$$
$$\lambda(1-\alpha\beta)e^{-\lambda t}\bar{F}(u+ct)+\lambda\alpha\beta e^{-\lambda t}\,\overline{F^*G(u+ct)} \tag{21}$$

公式(19)是这个式子的一个特殊情况，类似地，我们可以得到

$$\omega_n(u,t)=$$
$$(1-\alpha\beta)e^{-\lambda t}\frac{\lambda^n t^{n-1}}{(n-1)!}\Big[(1-\alpha\beta)\int_0^{ct}\frac{x}{ct}f^{*(n-1)}(u+ct-x)\bar{F}(x)\mathrm{d}x+$$
$$\alpha\beta\int_0^{ct}\frac{x}{ct}(f^*g)^{*(n-1)}(u+ct-x)\bar{F}(x)\mathrm{d}x\Big]+$$
$$\alpha\beta e^{-\lambda t}\frac{\lambda^n t^{n-1}}{(n-1)!}\Big[(1-\alpha\beta)\int_0^{ct}\frac{y}{ct}f^{*(n-1)}(u+ct-y)\,\overline{F^*G(y)}\mathrm{d}y+$$
$$\alpha\beta\int_0^{ct}\frac{y}{ct}(f^*g)^{*(n-1)}(u+ct-y)\,\overline{F^*G(y)}\mathrm{d}y\Big]-$$
$$c\sum_{j=1}^{n}\int_0^t(1-\alpha\beta)^2e^{-\lambda s}\frac{\lambda^n s^n}{j!}f^{*j}(u+cs)\omega_{n+1-j}(0,t-s)\mathrm{d}s-$$
$$c\sum_{j=1}^{n}\int_0^t\alpha\beta(\alpha\beta-1)e^{-\lambda s}\frac{\lambda^n s^n}{j!}(f^*g)^{*j}(u+cs)\omega_{n+1-j}(0,t-s)\mathrm{d}s \tag{22}$$

我们用 $\omega_{n+1}(u,t)\mathrm{d}t$ 表示在区间 $(t,t+\mathrm{d}t)$ 发生第 $n+1$ 次索赔，且导致破产发生的概率。假设在时刻 t 之前有 n 次索赔发生，总索赔额为 $u+ct-x$，因此在时刻 t 的盈余为 x，如果在区间 $(t,t+\mathrm{d}t)$ 上有一次索赔额超过 x 的索赔事件发生，则会导致破产的发生，即为(22)式的第 1 项和第 2 项之和；但这种情况没有考虑在时刻 t 之前盈余小于 0 的情形。假设在时刻 $s(0<s<t)$ 已经发生了 $j(0<j<n)$ 次索赔，总索赔额为 $u+cs$，则在 s 时刻的盈余为 0，从 s 时刻起第 $n+1-j$ 次索赔的密度函数为 $\omega_{n+1-j}(0,t-s)$，因此(22)式的后面两项则是考虑在时刻 t 之前盈余小于 0 的情形。由 $p_n(u,t)=\int_0^{\infty}\omega_n(u,t)\mathrm{d}t$ 可以得到 $u>0$ 时的破产概率的表达式。同理，我们也可用这种方法来分析独立二元风险模型下的情形，得到 $u>0$ 时独立二元风险模型第 n 次索赔时的破产概率的表达式。

4 结语

本文研究独立二元风险模型和一类索赔相依二元风险模型，通过构造一个特殊的 Gerber－Shiu 函数，推导出了两类二元风险模型下 Gerber－Shiu 函数满足的更新方程，由这个更新方程推导出破产时刻和直到破产时刻的索赔次数的联合密度函数，最终得到两类风险模型下第 n 次索赔时的破产概率的表达式。

（下转第 33 页）

[15] 牟淑志，杜春江，牟福远，等. 基于多岛遗传算法的连续体结构拓扑优化[J]. 机械科学与技术，2009，28(10)：1 316 -1 320.

[16] 黄平，孟永钢. 最优化理论与方法[M]. 北京：清华大学出版社，2009.

Aerothermal - Aeroelastic Optimization Design on Hypersonic Vehicle

YU Shengdong, MA Jinyu

(Department of Electrical and Electronic Engineering, Wenzhou Vocational & Technical College, Wenzhou Zhejiang 325035, China)

Abstract: On the base of the shape of the unpiloted hypersonic vehicle X - 43, hypersonic full - aircraft model was built with aerodynamic heating effect. Hierarchical solution process was used to dealing with aerothermal aeroelastic coupling problem neglecting the weak coupling effect between aeroelasticity heat load and aerodynamic load or elastic load. Compute hypersonic aerodynamic heating and the steady temperature field. The stress stiffness matrix under this temperature field was developed and the flutter equations were solved by p - k method finally. This paper realizes the aerothermal - aeroelastic optimization design of the hypersonic vehicle without changing the weight of the structure weight. The skin layer angle is the design variable and the flutter velocity are the optimization objective. The result shows that the composite laminate angle has a great impact on the nonlinear speed.

Keywords: hypersonic aircraft; aerothermal - aeroelastic; piston theory; flutter; optimization design

（责任编辑：张英健）

（上接第 15 页）

参考文献：

[1] 赵晓芹. 一类索赔到达计数过程相依的二元风险模型[J]. 数学的实践与认识，2006，36(2)：42 - 45.

[2] 张冕. 一类索赔相依二元风险模型的破产概率问题研究[J]. 经济数学，2008，25(2)：132 - 135.

[3] Gerber H U, Shiu E S W. On the time value of ruin[J]. North American Actuarial Journal, 1998, 2(1): 48 - 78.

[4] Landriault D, Shi T, Willmot G E. Joint density involving the time to ruin in the Sparre Andersen risk model under exponential assumptions[J]. Insurance: Mathe - matics and Economics, 2011, 49: 371 - 379.

[5] Dickson D C M. The joint distribution of the time to ruin and the number of claims until ruin in the classical risk model[J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2012, 50: 334 - 337.

[6] Hélène Cossette, Etienne Marceau. On the compound Poisson risk model with dep - endence based on a generalized Farlie - Gumbel - Morgenstern copula[J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2008, 43: 444 - 455.

[7] Dickson D C M. Some finite time ruin problems[J]. Annals of Actuarial Science, 2007, 2: 217 - 232.

The Probability of Ruin at the n^{th} Claim with Correlative Claim in Dual Risk Modle

TIAN Fei, WANG Chuanyu, ZHANG Dawei

(College of Math & Phy, Anhui Polytechnic University, Wuhu Anhui 241000, China)

Abstract: For the dual risk model for correlative claim, we derive the renewal equation of the Gerber - Shiu function by constructing a peculiar Gerber - Shiu function, obtain the joint probability density function of the time to ruin and the number of claims until ruin, and find the formula of ruin probability when riun occurs at the time of the n^{th} claim.

Keywords: dual risk modle; the number of claims; Laplace transform; ruin probability

（责任编辑：张英健）