非连通图 $D_4\cup G$ 的优美标号

吴跃生
(华东交通大学 基础科学学院, 江西 南昌　330013)

摘要:讨论了非连通图 $D_4\cup G$ 的优美性,给出了非连通图 $D_4\cup G$ 是优美图的 3 个充分条件。

关键词:优美图;交错图;非连通图;优美标号;荷兰 m - 风车
中图分类号:O157.5　　**文献标识码**:A　　**文章编号**:1671 - 5322(2014)04 - 0009 - 04

1　引言与概念

本文所讨论的图均为无向简单图,$V(G)$ 和 $E(G)$ 分别表示图 G 的顶点集和边集,记号 $[m,n]$ 表示整数集合 $\{m,m+1,\cdots,n\}$,其中 m 和 n 均为非负整数,且满足 $0\leqslant m<n$,其它未说明的符号及术语均同文献[1]。

图的优美标号问题是组合数学中一个热门课题[1-10]。

定义 1[1]　由 m 个完备图 K_3 的恰有一个公共点所构成的图成为荷兰 m - 风车(Dutch m - wind - mill),记作 D_m[1]。

文献[1]已指出:D_m 是优美图的充要条件为:$m=0,1(\mathrm{mod}4)$。

本文讨论非连通图 $D_4\cup G$ 的优美性。

定义 2[1]　对于一个图 $G=(V,E)$ 如果存在一个单射 $\theta:V(G)\to[0,|E(G)|]$ 使得对所有边 $e=(u,v)\in E(G)$,由 $\theta'(e)=|\theta(u)-\theta(v)|$ 导出的 $E(G)\to[1,|E(G)|]$ 是一个双射,则称 G 是优美图,θ 是 G 的一组优美标号,θ' 为 G 的边上的由 θ 导出的诱导值。

定义 3[1]　设 f 为 G 的一个优美标号,如果存在一个正整数 k,使得对任意的 $uv\in E(G)$ 有

$$f(u)>k\geqslant f(v) \text{ 或 } f(u)\leqslant k<f(v)$$

成立,则称 f 为 G 的平衡标号(或称 G 有平衡标号 f),且称 k 为 f 的特征。图 G 称为平衡二分图(balanced bipartite graph)。

显然,若 f 为 G 的平衡标号,则 k 是边导出标号为 1 的边的两个端点中,标号较小顶点的标号。

定义 4[1]　在平衡二分图 G 中,设其优美标号 θ 的特征为 k,并且 $\theta(u_0)=k,\theta(v_0)=k+1$,则称 u_0 为 G 的二分点,v_0 为 G 的对偶二分点。

定义 5[2]　G 是一个优美二部图,其优美标号为 θ,$V(G)$ 划分成两个集合 X、Y,如果 $\max\limits_{v\in X}\theta(v)<\min\limits_{v\in Y}\theta(v)$,则称 θ 是 G 的交错标号。称 G 是在交错标号 θ 下的交错图。

事实上,交错图就是平衡图。$\max\limits_{v\in X}\theta(v)=k$ 就是交错图关于交错标号的特征。

2　主要结果及其证明

定理 1　如果图 G 是特征为 k 且缺 $k+2$ 标号值的交错图($2\leqslant k+2\leqslant|E(G)|$),则非连通图 $D_4\cup G$ 存在缺 $k+1$、$k+7$、$k+8$ 和 $k+9$ 标号值的优美标号。

证明　设荷兰风车 D_4 如图 1 所示,X、Y 是图 G 的一个二分化,θ_1 是图 G 的交错标号,且 $\max\limits_{v\in X}\theta_1(v)=k<\min\limits_{v\in Y}\theta_1(v)=k+1$,$|E(G)|=q$。

定义 $D_4\cup G$ 的顶点标号 θ 为:

$\theta(v_1)=k+2,\theta(v_2)=k+6,\theta(v_3)=k+12,$
$\theta(v_4)=k+3,\theta(v_5)=k+14,\theta(v_6)=k+5,$
$\theta(v_7)=k+10,\theta(v_8)=k+4,\theta(v_9)=k+11,$

$$\theta(v)=\begin{cases}\theta_1(v),v\in X,\\ \theta_1(v)+12,v\in Y\end{cases}$$

下面证明 θ 是非连通图 $D_4\cup G$ 的优美标号。

(1)$\theta:X\to[0,\ k]$ 是单射(或双射);$\theta:Y\to[k$

收稿日期:2014 - 05 - 09
基金项目:国家自然科学基金项目(11261019,11361024);江西省自然科学基金项目(20114BAB201010)
作者简介:吴跃生(1959 -),男,江西瑞金人,副教授,硕士,主要研究方向为图论。

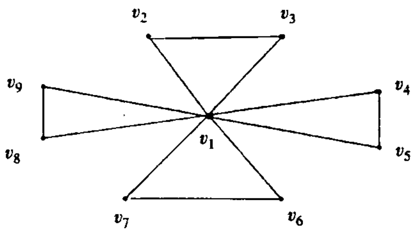

图 1　荷兰风车图 D_4

Fig. 1　Dutch wind - mill D_4

$+13,q+12]-\{k+14\}$ 是单射(或双射);

$\theta: V(D_4)\to[k+2,k+12]\cup\{k+14\}-\{k+7,k+8,k+9\}$ 是双射;

容易验证:$\theta: V(D_4\cup G)\to[0,q+12]-\{k+1,k+7,k+8,k+9\}$ 是单射(或双射)。

(2)$\theta'(v_1v_2)=|\theta(v_1)-\theta(v_2)|=4$,
$\theta'(v_1v_3)=10, \theta'(v_2v_3)=6, \theta'(v_1v_4)=1$,
$\theta'(v_1v_5)=12, \theta'(v_4v_5)=11, \theta'(v_6v_1)=3$,
$\theta'(v_7v_1)=8, \theta'(v_6v_7)=5, \theta'(v_8v_1)=2$,
$\theta'(v_9v_1)=9, \theta'(v_8v_9)=7$。

$\theta': E(D_4)\to[1,12]$ 是双射;

$\theta': E(G)\to[13,q+12]$ 是双射。

$\theta': E(D_4\cup G)\to[1,q+12]$ 是一一对应。

由(1)和(2)可知,θ 就是非连通图 $D_4\cup G$ 的缺 $k+1$、$k+7$、$k+8$ 和 $k+9$ 标号值的优美标号。证毕。

定理 2　如果图 G 是特征为 k 且缺 $k+10$ 标号值的交错图($10\leqslant k+10\leqslant|E(G)|$),则非连通图 $D_4\cup G$ 存在缺 $k+4$、$k+5$、$k+6$ 和 $k+12$ 标号值的优美标号。

证明　设荷兰风车 D_4 如图 1 所示,X、Y 是图 G 的一个二分化,θ_1 是图 G 的交错标号,且 $\max\limits_{v\in X}\theta_1(v)=k<\min\limits_{v\in Y}\theta_1(v)=k+1$, $|E(G)|=q$。

定义 $D_4\cup G$ 的顶点标号 θ 为:

$\theta(v_1)=k+11, \theta(v_2)=k+1, \theta(v_3)=k+7$,
$\theta(v_4)=k+10, \theta(v_5)=k+22, \theta(v_6)=k+8$,
$\theta(v_7)=k+3, \theta(v_8)=k+9, \theta(v_9)=k+2$,

$$\theta(v)=\begin{cases}\theta_1(v), v\in X,\\ \theta_1(v)+12, v\in Y\end{cases}$$

下面证明 θ 是非连通图 $D_4\cup G$ 的优美标号。

(1)$\theta: X\to[0, k]$ 是单射(或双射);$\theta: Y\to[k+13,q+12]-\{k+22\}$ 是单射(或双射);

$\theta: V(D_4)\to[k+1,k+11]\cup\{k+22\}-\{k+4,k+5,k+6\}$ 是双射;

容易验证:$\theta: V(D_4\cup G)\to[0,q+12]-\{k+4,k+5,k+6,k+12\}$ 是单射(或双射)。

(2)$\theta'(v_1v_2)=|\theta(v_1)-\theta(v_2)|=10$,
$\theta'(v_1v_3)=4, \theta'(v_2v_3)=6, \theta'(v_1v_4)=1$,
$\theta'(v_1v_5)=11, \theta'(v_4v_5)=12, \theta'(v_6v_1)=3$,
$\theta'(v_7v_1)=8, \theta'(v_6v_7)=5, \theta'(v_8v_1)=2$,
$\theta'(v_9v_1)=9, \theta'(v_8v_9)=7$。

$\theta: E(D_4)\to[1,12]$ 是双射;

$\theta': E(G)\to[13,q+12]$ 是双射。

$\theta': E(D_4\cup G)\to[1,q+12]$ 是一一对应。

由(1)和(2)可知,θ 就是非连通图 $D_4\cup G$ 的缺 $k+4$、$k+5$、$k+6$ 和 $k+12$ 标号值的优美标号。证毕。

定理 3　如果图 G 是特征为 k 且缺 $k+11$ 标号值的交错图($11\leqslant k+11\leqslant|E(G)|$),则非连通图 $D_4\cup G$ 存在缺 $k+1$、$k+5$、$k+6$ 和 $k+7$ 标号值的优美标号。

证明　设荷兰风车 D_4 如图 1 所示,X、Y 是图 G 的一个二分化,θ_1 是图 G 的交错标号,且 $\max\limits_{v\in X}\theta_1(v)=k<\min\limits_{v\in Y}\theta_1(v)=k+1$, $|E(G)|=q$。

定义 $D_4\cup G$ 的顶点标号 θ 为:

$\theta(v_1)=k+12, \theta(v_2)=k+2, \theta(v_3)=k+8$,
$\theta(v_4)=k+11, \theta(v_5)=k+23, \theta(v_6)=k+9$,
$\theta(v_7)=k+4, \theta(v_8)=k+10, \theta(v_9)=k+3$,

$$\theta(v)=\begin{cases}\theta_1(v), v\in X,\\ \theta_1(v)+12, v\in Y。\end{cases}$$

下面证明 θ 是非连通图 $D_4\cup G$ 的优美标号。

(1)$\theta: X\to[0, k]$ 是单射(或双射);$\theta: Y\to[k+13,q+12]-\{k+23\}$ 是单射(或双射);

$\theta: V(D_4)\to[k+2,k+12]\cup\{k+23\}-\{k+5,k+6,k+7\}$ 是双射;

容易验证:$\theta: V(D_4\cup G)\to[0,q+12]-\{k+1,k+5,k+6,k+7\}$ 是单射(或双射)。

(2)$\theta'(v_1v_2)=|\theta(v_1)-\theta(v_2)|=10$,
$\theta'(v_1v_3)=4, \theta'(v_2v_3)=6, \theta'(v_1v_4)=1$,
$\theta'(v_1v_5)=11, \theta'(v_4v_5)=12, \theta'(v_6v_1)=3$,
$\theta'(v_7v_1)=8, \theta'(v_6v_7)=5, \theta'(v_8v_1)=2$,
$\theta'(v_9v_1)=9, \theta'(v_8v_9)=7$。

$\theta': E(D_4)\to[1,12]$ 是双射;

$\theta': E(G)\to[13,q+12]$ 是双射。

$\theta': E(D_4\cup G)\to[1,q+12]$ 是一一对应。

由(1)和(2)可知,θ 就是非连通图 $D_4\cup G$ 的

缺 $k+1$、$k+5$、$k+6$ 和 $k+7$ 标号值的优美标号。证毕。

引理 1　对任意正整数 n,设 C_{4n}是有 $4n$ 个顶点的圈,则 C_{4n}存在特征为 $2n-1$,且缺 $3n$ 的交错标号。

证明　记圈 C_{4n}上的顶点依次为 $v_1,v_2,\cdots,v_{4n}$,定义圈 C_{4n}的顶点标号 θ 为:

$$\theta(v_{2i-1})=i-1,i=1,2,\cdots,2n$$

$$\theta(v_{2i})=\begin{cases}4n+1-i,i=1,2,\cdots,n\\4n-i,i=n+1,n+2,\cdots,2n\end{cases}$$

容易验证,θ 就是圈 C_{4n}的特征为 $2n-1$,且缺 $3n$ 的交错标号。

注意到:$3n=(2n-1)+n+1$,由定理 1 和引理 1 有:

推论 1　非连通图 $D_4\cup C_4$ 存在缺 2、8、9 和 11 标号值的优美标号。

非连通图 $D_4\cup C_4$ 的优美标号如图 2 所示。

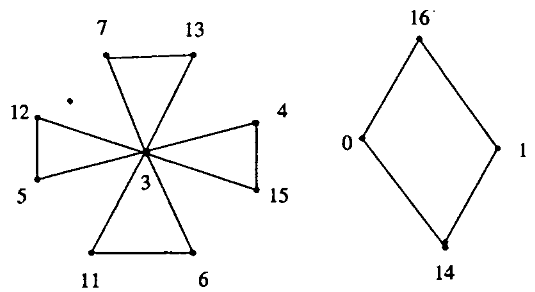

图 2　非连通图 $D_4\cup C_4$ 的优美标号

Fig. 2　The graceful labeling of the graph $D_4\cup C_4$

由定理 2 和引理 1 有:

推论 2　非连通图 $D_4\cup C_{36}$存在缺 21、22、23 和 29 标号值的优美标号。

非连通图 $D_4\cup C_{36}$中 D_4 的优美标号如图 3 所示。非连通图 $D_4\cup C_{36}$中 C_{36}的优美标号为:0、48、1、47、2、46、3、45、4、44、5、43、6、42、7、41、8、40、9、38、10、37、11、36、12、35、13、34、14、33、15、32、16、31、17、30。

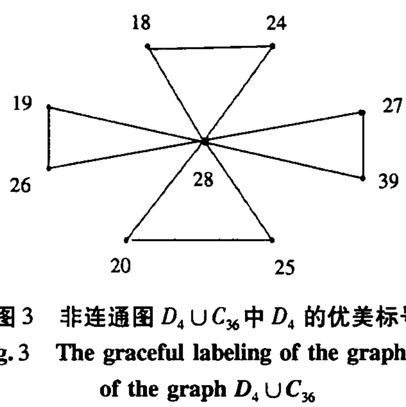

图 3　非连通图 $D_4\cup C_{36}$中 D_4 的优美标号

Fig. 3　The graceful labeling of the graph D_4 of the graph $D_4\cup C_{36}$

由定理 3 和引理 1 有:

推论 3　非连通图 $D_4\cup C_{40}$存在缺 20、24、25 和 26 标号值的优美标号。

非连通图 $D_4\cup C_{40}$中 D_4 的优美标号如图 4 所示。非连通图 $D_4\cup C_{40}$中 C_{40}的优美标号为:0、52、1、51、2、50、3、49、4、48、5、47、6、46、7、45、8、44、9、43、10、41、11、40、12、39、13、38、14、37、15、36、16、35、17、34、18、33、19、32。

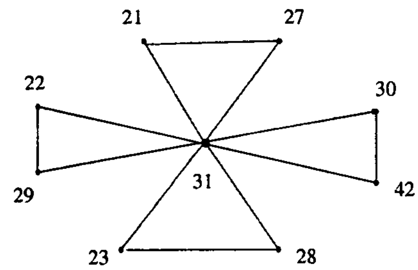

图 4　非连通图 $D_4\cup C_{40}$中 D_4 的优美标号

Fig. 4　The graceful labeling of the graph D_4 of the graph $D_4\cup C_{40}$

引理 2[1]　当 m、n 为任意自然数,且当 $m\geqslant2$、$n\geqslant2$ 时,完全二分图 $K_{m,n}$存在特征 $m-1$(或 $n-1$)缺标号值 $m+1$(或 $n+1$)的交错标号。

由定理 1 和引理 2 有:

推论 4　当 m、n 为任意自然数,且当 $m\geqslant2$、$n\geqslant2$ 时,非连通图 $K_{m,n}\cup D_4$ 存在缺标号值 m、$m+6$、$m+7$、$m+8$(或 n、$n+6$、$n+7$、$n+8$)的优美标号。

例 1　非连通图 $K_{3,4}\cup D_4$ 存在缺 2、8、9 和 10 标号值的优美标号如图 5 所示。非连通图 $K_{3,4}\cup D_4$ 存在缺 3、9、10 和 11 标号值的优美标号如图 6 所示。

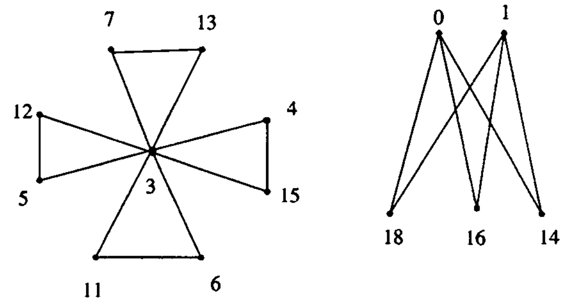

图 5　非连通图 $D_4\cup K_{3,4}$的第 1 种优美标号

Fig. 5　The first graceful labeling of the graph $D_4\cup K_{2,4}$

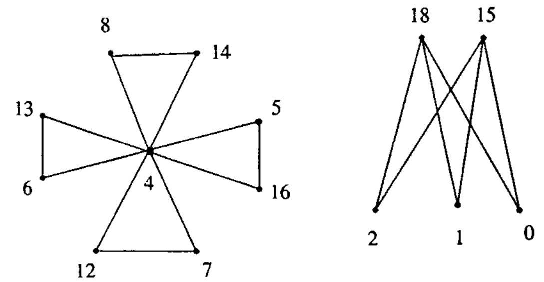

图6　非连通图 $D_4 \cup K_{3,4}$ 的第2种优美标号

Fig. 6　The second graceful labeling of the graph $D_4 \cup K_{2,4}$

例2　我们把圈 C_4 的每一个顶点都粘接一个图 G,这样所得到的图称为圈 C_4 的 G - 冠。因为圈 C_4 的 C_4 - 冠存在特征为9缺11的交错标号,所以非连通图(C_4 的 C_4 - 冠)$\cup D_4$ 存在缺10、16、17和18标号值的优美标号,非连通图(C_4 的 C_4 - 冠)$\cup D_4$ 存在缺10、16、17和18标号值的优美标号,如图7所示。

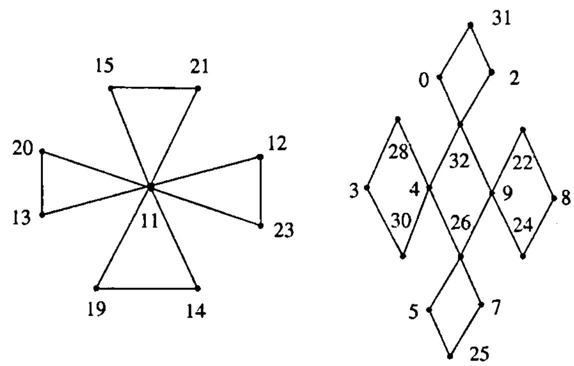

图7　非连通图 $D_4 \cup$(C_4 的 C_4 - 冠)的优美标号

Fig. 7　The graceful labeling of the graph $D_4 \cup C_4$ - corna of the cycle C_4

参考文献:

[1] 马克杰. 优美图[M]. 北京:北京大学出版社,1991.

[2] 杨显文. 关于 C_{4m} 蛇的优美性[J]. 工程数学学报,1995,12(4):108 - 112.

[3] 吴跃生. 关于圈 C_{4h} 的 $(r_1, r_2, \cdots, r_{4h})$ - 冠的优美性[J]. 华东交通大学学报,2011,28(1):77 - 80.

[4] 吴跃生,李咏秋. 关于圈 C_{4h+3} 的 $(r_1, r_2, \cdots, r_{4h+3})$ - 冠的优美性[J]. 吉首大学学报:自然科学版,2011,32(6):1 - 4.

[5] 吴跃生. 关于图 $P^3_{6k+5} \cup P_n^{\ 3}$ 的优美性[J]. 吉首大学学报:自然科学版,2012,33(3):4 - 7.

[6] 吴跃生,徐保根. 两类非连通图 $(P_2 \vee \overline{K_n})(0,0,r_1,0,\cdots,0,r_n) \cup St(m)$ 及 $(P_2 \vee \overline{K_n})(r_1 + a, r_2, 0, \cdots, 0) \cup G_r$ 的优美性[J]. 中山大学学报:自然科学版,2012,51(5):63 - 66.

[7] 吴跃生. 图 $C_7(r_1, r_2, r_3, \ , r_4, r_5, 0, 0) \cup St(m)$ 的优美性[J]. 吉首大学学报:自然科学版,2012,33(5):9 - 11.

[8] 吴跃生,王广富,徐保根. 关于 $C_{4h+1} \odot K_1$ 的 $(Gr_1, Gr_2, \cdots, Gr_{4h+1}, Gr_{4h+2})$ - 冠的优美性[J]. 山东大学学报,2013,48(4):25 - 27.

[9] 吴跃生. 关于圈 C_{4h+3} 的 $(Gr_1, Gr_2, \cdots, Gr_{4h+3})$ - 冠的优美性[J]. 吉首大学学报:自然科学版,2013,34(4):4 - 9.

[10] 吴跃生,王广富,徐保根. 非连通图 $C_{2n+1} \cup G_{n-1}$ 的优美性[J]. 华东交通大学学报,2012,29(6):26 - 29.

The Graceful Labeling of the Unconnected Graph $D_4 \cup G$

WU Yuesheng

(School of Basic Science, East China Jiaotong University, Nanchang Jiangxi　330013, China)

Abstract: The gracefulness of the unconnected graph $D_4 \cup G$ is discussed. Three sufficient conditions are given for the gracefulness of unconnected graph $D_4 \cup G$.

Keywords: graceful graph; balanced bipartite graph; unconnected graph; graceful labeling; Dutch m - wind - mill

(责任编辑:张英健)

非连通图D4∪G的优美标号

作者： 吴跃生， WU Yuesheng
作者单位： 华东交通大学基础科学学院,江西南昌,330013
刊名： 盐城工学院学报（自然科学版）
英文刊名： Journal of Yancheng Institute of Technology(Natural Science Edition)
年，卷(期)： 2014,27(4)